

Arne Engström

SEMIOTIK OCH MATEMATIKDIDAKTIK

En introduktion

SAMMANFATTNING

Under senare år har ett nytt forskningsområde i tvärsnittet mellan matematikdidaktik och semiotik växt fram. I föreliggande arbetsrapport presenteras några grundläggande frågeställningar för detta område.

Matematik uppfattas här som en generalisering av tecken eller representationssystem. Människor uttrycker matematiska tankar med hjälp av tecken av olika slag. Ur didaktisk synvinkel är det intressant att studera vilken mening som tilldelas de olika tecken vi använder oss av att tänka och kommunicera våra tankar med.

Vidare behandlas en av semiotikens förgrundsgestalter, Charles S Peirce.

Det matematiska tänkandet är huvudsakligen icke-språkligt. Genom att studera kommunikationsprocessen ur ett semiotiskt perspektiv överskrids de begränsningar som ligger i traditionella kommunikationsstudier, där man fokuserar på språkanvändningen.

Nyckelord: Abduktion, matematikdidaktik, Peirce, representation, semiotik, tecken.

Innehållsförteckning

1. Inledning.....	5
1.1 Matematisk notation	5
1.2 Tecken att tänka med	6
1.3 Den besvärliga nollan	8
1.4 Matematiska formler	10
2. Semiotik.....	13
2.1 Teckenmodeller	13
3. Semiotik och matematikdidaktik	15
3.1 Matematikdidaktik och meningsskapande	15
3.2 Sakförhållandet	16
3.3 Representationens problem	16
3.4 Tolkning	20
4. Charles S Peirces semiotik	21
4.1 Teckenbegreppet	21
4.2 Abduktion	25
5. Avslutning.....	27
Noter	28
Referenser	30

1. Inledning

Om matematikerna hade fått nöja sig med ord och nekats bruket av siffror och andra specialsymboler, så skulle matematikens utveckling till dess nuvarande höga nivå inte bara varit svårare utan psykologiskt omöjlig (Rudolf Carnap citerad i Sällström 1991, s 207).

Ett växande och intressant forskningsområde utgörs av tvärsnittet mellan semiotik, matematik och didaktik. Föreliggande arbetsrapport presenterar några grundläggande frågeställningar inom detta område. Jag har tidigare delvis behandlat detta område i *Rationalitet och intersubjektivitet – Om matematikundervisningens kommunikativa karaktär* (Engström 2001). Här ska en kort introduktion till forskningsområdets frågeställningar göras.

I detta inledande avsnitt ska jag ta en utgångspunkt i den matematiska notationen för att belysa några matematikdidaktiska frågeställningar som berör semiotiken. Semiotik betyder teckenlära. Från en matematikdidaktisk synvinkel är det av intresse att studera den mening vi tilldelar matematiska tecken, som vi använder i olika sammanhang.

1.1 Matematisk notation

• • • • • IIIIII VII $3 + 4 = 7$

$\forall$ $\supseteq$ $\in$ Σ $\neq$ $\propto$ $\cap$ $\{ \}$ f $>$

$\int$ ∞ e $\log$ $\sin$ $\cos$ π

Matematik är intimt förknippat med symboler och formler av olika slag. För den oinvigde ter sig dessa många gånger som något mystiskt, för att

inte säga magiskt, något som tillhör en förtrollad värld bara några få förunnade att känna till.

Under historiens gång har den matematiska notationen tagit sig olika uttryck allt från några regelbundet grupperade streck inkarvade i vargben, sumerernas kilskrift inpräglade i lertavlor, egypternas hieroglyfer på papyrusrullar, kinesers, japaners, indiers, arabers och andra kulturers olika teckensystem till våra dagars närmast standardiserade matematiska notation. Men matematisk notation är inte bara symboler och formler utan också text. I denna skrift ska allt detta benämnas som *tecken*.

Till skillnad från matematiken själv, med dess karaktär av *nödvändighet*, är dess beteckningar *sociala konventioner* och därmed arbiträra (godtyckliga). Det finns ingen nödvändighet i att vi låter representera ett visst tal med till exempel "3" eller "4-1". Men har vi väl kommit överens om att beteckna ett visst tal på ett visst sätt så följer därav ett antal konsekvenser.

Vissa tecken som vi använder oss av inom matematiken har en intressant historia. Kring flera av våra vanliga matematiska tecken har det stått en lång strid om hur det ska se ut.

Matematiska tecken står *för* något, det vill säga de *representerar* en idé eller tanke. Människor uttrycker matematiska tankar med hjälp av tecken av olika slag. Vi använder tecken till att tänka med, uttrycka och kommunicera våra tankar med andra människor.

1.2 Tecken att tänka med

För varje teori med anspråk att söka förklara lärande blir det av intresse att studera vilken mening vi tilldelar olika tecken när vi använder dem för att tänka och kommunicera vårt tänkande med. För att göra oss förstådda bland andra måste det finnas en viss kongruens i denna meningstilldelning av tecknen. Ibland förefaller oss användandet av tecken så självklart, framför allt i matematik, att vi kanske inte funderar så mycket över tolkningen av tecknen. Semiotik handlar om *tolkning av tecken*.

Matematik kan uppfattas som en generalisering av tecken eller representationssystem, framhåller Michael Hoffmann och Marcel Plöger (2000). En väsentlig del av den moderna matematiken handlar om *symbolisering*.

Den klassiska matematiken var retorisk, det vill säga den framställdes med ord eller ordförkortningar. Under medeltiden skedde en bety-

delsefull förändring, mot en högre grad av abstraktion av matematiken, den så kallade symboliska abstraktionen, genom mötet mellan den orientalisk-medeltida och den grekiska matematiken vilket resulterar i algebrans födelse i början av 1600-talet (Thompson 1991). Med den symboliska abstraktionen, den analytiska geometrin samt infinitesimalkalkylen inleds den moderna matematiken.

De viktiga abstraktionssteg som tas kan följas i utvecklingen av den matematiska notationen, till exempel genom införandet av särskilda tecken för "intet" (nollan), det "okända" (x, y, z), "det ospecificerade" (a, b, c), samt "det förmodade lilla" inom infinitesimalkalkylen (Sällström 1991). Utvecklingen av den matematiska notationen motsvarar en allt högre grad av abstraktion, vilket var en förutsättning för den snabba utvecklingen av matematikens tillämpning inom naturvetenskapen. Det handlar inte främst om en abstraktion av den direkta verkligheten, utan om en kedja av abstraktioner, *abstraktioner av abstraktioner*. I varje abstraktions- eller generaliseringssteg har vi att göra med tecken eller symboler, vilka representerar (generella abstrakta) objekt, som härstammar från en abstraktion och en generalisering.

Vi kan ta ett exempel från matematikens historia, nämligen upptäckten av *inkommensurabiliteten* i den tidiga grekiska matematiken (Hoffmann & Plöger 2000). Innebörden är att två sträckor inte generellt kan antas vara kommensurabla, det vill säga möjliga att mäta med samma mått. Så är exempelvis sidan och diagonalen i en kvadrat inkommensurabla.

Inkommensurabilitets problem kan göras till ett problem först om man lämnar, det vill säga abstraherar från, verkligheten. Ser man det praktiskt är naturligtvis alla sträckor "mätbara", också diagonalen i en kvadrat med sidan 1. (I modern terminologi är diagonalen, här $\sqrt{2}$, ett exempel på ett irrationellt tal.)

Bildandet av begreppet inkommensurabilitet och därmed dess *hypostasering* till ett självständigt matematiskt objekt, förutsätter för det första att man betraktar relationen mellan tal som generella abstrakta objekt. Tal uppfattades av babylonierna och egyptierna främst som instrument för att mäta och räkna med. För det andra förutsätts att dessa relationer betraktas som bestämda av lagbundenheter, vilka inte kan uppfattas genom observation, utan endast genom ett logiskt-deduktivt övervägande, som verifieras genom bevis. Det är därför man allmänt uppfattar inkommensurabiliteten som det som avgränsar *vetenskapligheten* i den grekiska matematiken gentemot den äldre, förvetenskapliga, orientaliska matematiken.

1.3 Den besvärliga nollan

Nollfel, det vill säga fel i enkla aritmetiska uppgifter där noll(or) finns med, är relativt vanliga. Barn kan uppleva att "nollan" fungerar olika i olika situationer, till exempel:

$$\begin{array}{ccccccc} 5 + 0 & 0 + 5 & 5 - 0 & 0 - 5 & 0 \cdot 5 & 5 \cdot 0 & 3 \cdot 15 \cdot 0 \\ 5 : 0 & 0 : 5 & 0 : 0 & & & & \end{array}$$

Vanliga elevuppfattningar är att "nollan räknas inte" eller att "det går inte" i sådana uppgifter. Här nedan följer några elevers argumentering kring uppgifter med noll som jag lånat från Christoph Selter och Hartmund Spiegel (1997, s 76f, min lätt bearbetade översättning):

Uppgift: $x \cdot 0$ eller $0 \cdot x$

Michael: *När det står en nolla framför eller efter en uppgift, så kan man inte räkna ut den, då är det alltid noll.*

Susanne: *45 gånger 0, det går ju inte.*

Alexander: *När det är gånger, så tar nollan överhanden över de andra.*

Uppgiften $15 \cdot 3 \cdot 0$ visade sig i en undersökning ha en felfrekvens på nästan 85%. Vad är det som gör den så svår?

Lisette: *Då behöver man egentligen inte räkna med noll. ... Då behöver man inte räkna 45 gånger 0, då har man fått ut resultatet. Det riktiga, egentligen... Egentligen kan man glömma den, men när den står i en mattebok, då måste man ha med den.*

Uppgift: $0 : 5$

Andreas: *Mmh, 0 delat med 5, det går inte.*

Varför inte?

Andreas: *Ja, eftersom 0. 5:an kan man inte ta genom 0, då den är för liten för att dela 5 med. Om man tog 4 eller 3 eller 2 eller 1, så skulle inte det heller gå.*

Vad skriver du då, om du skulle få uppgiften?

Andreas: *0!*

Först sa du ”går inte” och nu säger du ”0”. Är det samma sak?

Andreas: *Ja.*

André: *När man delar noll saker med 5 barn, det går ju inte, då har du inget, som du ska dela med, alltså noll.*

Uppgift: 5 : 0

Christoph: *Är 5 eller 0! Hur många gånger går 0 i 5? Åh, jag blir helt förvirrad.*

Agnieszka: *Ja, eftersom 5 delat med 0, då delas inget. Alltså är det 5.*

Användningen av ett särskilt tecken för ”intet” har varit högst problematiskt under historiens gång. Det var inget självklart och tog relativt lång tid att införa. I ett *teckenvärdessystem*, det vill säga där ental, tiotal, etc skrivs med olika tecken – såsom i det sumeriska, egyptiska och romerska eller det grekiska decimala bokstavssystemet – behövdes inte noll. I ett *platsvärdessystem* däremot, där samma siffror används för ental och tiotal och så vidare enligt positionsprincipen, behövs en nolla som en platshållare för att exempelvis kunna skilja 201 från 21. I det babyloniska sexagesimala systemet (ett arv från sumererna) användes i stället en tom plats eller ett kolon. Muhammad al-Khwarizmi beskriver runt 825 vår tideräkning det indiska systemet med att använda en ring som tecken för noll, ett system som redan då hade använts i denna del av världen i hundratals år. Det indiska namnet för noll var *sunya* (tomrum). Den arabiska översättningen *sifr* latiniserades senare till *zephirum*, ursprunget till svenskans siffra och engelskans zero. Att därifrån ta steget till att uppfatta noll som ett *tal* var långt. Införandet av ett tecken för ”intet”, nollan, möttes av stort motstånd under medeltiden.

Brian Rotman (1987) beskriver nollan som en symbol för en genomgripande förändring i människans föreställning av förhållandet mellan språk och verklighet, eller nollans semiotik. Han jämför där nollans betydelse i matematiken med centralperspektivets betydelse inom bild-

konsten och de imaginära pengarnas (valutans) betydelse inom ekonomin under renässansen.

Finns det flera olika nollor? I modern matematik definieras elementet noll av sina egenskaper, speciellt att $a + 0 = a$ för alla a . Det finns flera olika nollelement, till exempel nollvektorer och nollfunktioner samt den tomma mängden, $\emptyset$.

I en genetisk betingad lärogång, det vill säga där man tar hänsyn till hur matematiken historiskt har utvecklats, bör nollan introduceras som en beteckning för tom plats i vårt positionssystem, poängterar Jan Thompson (1991). Att låta elever öva uppgifter av typen $0 + 4 = 4$ i nybörjarundervisningen är högst diskutabelt, eftersom det förutsätter en högre grad av abstraktion, nämligen att uppfatta noll som ett tal.

1.4 Matematiska formler

En matematisk formel är ett mellanting mellan bild och språk. Den konkretiserar och åskådliggör, dock utan att avbilda, skriver Pehr Sällström (1991). En stor fördel med formler är att de lätt kan manipuleras och jämföras. Det kan vara svårt att särskilja form från innehåll, betonar Sällström, genom symbiosen mellan formelskriften och den abstrakta algebraiska struktur den representerar.

Gotlobb Frege (1891/1995, 1892/1995) skiljer mellan mening (*Sinn*) och betydelse (*Bedeutung*). " $2 \cdot 3$ " och " $2 + 4$ " har samma *betydelse*, men inte samma *mening*. Det senare innebär att de inte innehåller samma tanke (*Gedanke*). Tanken (till exempel Pythagoras' sats) måste skiljas från en elevs föreställning (*Vorstellung*) om Pythagoras' sats. En tanke kan vara *sann* eller *falsk*. Detta gäller oberoende av en elevs *föreställning* om det sanna eller falska i tanken. Eleverna kan uppfatta samma tanke, men föreställningarna hos eleverna om denna tanke bärs hos var och en. Två människor kan inte ha samma föreställning.

Om den tanke jag utsäger i Pythagoras' sats kan inses som sann av andra såväl som av mig, då tillhör den inte mitt medvetandes innehåll, och då är jag inte dess bärare, men kan trots det inse att den är sann. Om det inte är samma tanke som jag och någon annan fattar som innehållet i Pythagoras' sats, borde man egentligen inte få säga "Pythagoras' sats" utan "min Pythagoras' sats", "hans Pythagoras' sats", och dessa vore olika: ty meningen hör med nödvändighet till satsen. I sådana fall skulle min tanke vara ett innehåll i mitt medvetande. Kunde då meningen i min Pythagoras' sats vara sann, och meningen i hans falsk? Jag har hävdad

att ordet "röd" bara är användbart inom mitt medvetandes domän, om det inte anger en egenskap hos tingen, utan kännetecknar ett antal av mina sinnesintryck. På så sätt skulle orden "sann" och "falsk" såsom jag förstår dem, bara kunna vara användbara inom mitt medvetandes domän, om de inte gäller något vars bärare jag inte är, utan bestäms till att på något sätt känneteckna mitt medvetandes innehåll. Då skulle sanningen vara inskränkt till mitt medvetandes innehåll, och det skulle förbli tvivelaktigt huruvida något liknande överhuvudtaget förekommer i andras medvetanden (Frege 1918/1995, s 122–123).

De tecken vi finner i formler är av tre slag (Sällström 1991):

- *deskriptiva tecken*, noterade med bokstäver eller bokstavs-kombinationer
- *konstruktiva tecken*, med hjälp av vilka formler byggs upp, det vill säga symbolerna för räkneoperationer, likhetstecken och parenteser av olika slag
- *specialtecken* såsom π , e, log, sin etc, och olika sammansatta tecken.

2. Semiotik

Semiotik betyder läran om tecken. Själva termen semiotik används på lite olika sätt. Den kan dels uppfattas som en metod, som ett sätt att närma sig ett undersökningsobjekt, dels som en särskild vetenskap. En företrädare för denna senare uppfattning är, den i Lund verksamme konstvetaren Göran Sonesson (se till exempel Sonesson 1987, 1989, 1992).

Sonesson utvidgar semiotiken till en *betydelselära*, som studerar hur mening uppstår generellt, hur tecken och betydelser fungerar i allmänhet och ser därmed semiotiken som en nomotetisk (lagsökande) vetenskap¹. Den arbetar på human- och samhällsvetenskapernas traditionella områden och använder sig av olika metoder och bygger teoretiska modeller. Den är humanvetenskaplig inte bara därför att dess ämne är människor och det av människor producerade utan för att den uppfattar de senare som kvaliteter, snarare än kvantiteter.

En annorlunda introduktion till semiotiken är Jesper Hoffmeyers *Livstecken* (1997), där han utifrån biologens perspektiv utvecklar sin syn på tecknet som den grundläggande enheten för att förstå livet.

Semiotik, utgjorde hos de antika filosoferna en del av filosofin. Numera framstår den alltmer som en egen disciplin. Det är framför allt två pionjärer, schweizaren Ferdinand de Saussure, grundare av den moderna strukturella lingvistik, och pragmatismens grundare, den amerikanske filosofen och matematikern Charles S Peirce, som kommit att stå för två huvudinriktningar inom semiotiken. De flesta framstående semiotiker, såsom Luis Hjelmslev, Charles Morris, Roman Jakobson, Roland Barthes, Julia Kristeva och Umberto Eco, kan hänföras till den ena eller andra riktningen alternativt till försök att utforma en syntes dem emellan.² Intresset för både semiotiken och Peirces arbeten inom fältet har kraftigt accentuerats under 1990-talet.

2.1 Teckenmodeller

En av de viktigaste teckenmodellerna utgörs av de Saussures distinktion mellan uttryck och innehåll, mellan den abstrakta ljudbilden *signifiant*

(betecknande) och begreppet *signifié* (betecknat). I språket är uttrycket (en föreställning om) ett ljud, medan innehållet är ett begrepp, en idé eller (föreställningar om) personer, föremål och andra. Tecknet förhåller sig relativt godtyckligt till verkligheten. Tecknet uppstår först i och med att något betecknas och betecknandet är en viljeakt. I frågan om tecknets existens framstår de Saussure som en nominalist.

Peirces teckenbegrepp är triadiskt, och innefattar inte bara språkliga uttryck utan alla former av tecken. En genomgång av Peirces verksamhet görs i avsnitt 4. Viktigt att notera är också Freges viktiga distinktion mellan *Sinn* (mening) och *Bedeutung* (betydelse), har sin motsvarighet i Peirces *interpretant* och *objekt* (se avsnitt 4). Både Peirce och Frege uppträder som realister i sin uppfattning av tecken.³

3. Semiotik och matematikdidaktik

I detta avsnitt ska semiotikens betydelse för matematikdidaktiken diskuteras, varvid framför allt tre dimensioner, det matematiska sakförhållandet, representationen och tolkningen av det, kommer att behandlas.

3.1 Matematikdidaktik och meningsskapande

Elevers meningsskapande processer har traditionellt studerats genom olika samtals- och diskursanalytiska studier. Semiotikens klara fördelar gentemot dessa studier är att *alla* uttryck, språkliga som icke-språkliga, till exempel de för matematikdidaktiken så centrala matematiska symbolerna, representationer av olika slag (diagram, tabeller, etc), åskådningsmateriel och olika hjälpmedel räknas in (se t ex Seeger 2000).

Semiotiken berör några viktiga dimensioner av matematikdidaktiken,

- *objektet*, eller sakförhållandet
- *representationen* (intern och extern) av dessa objekt eller sakförhållanden
- *tolkningen* av dem.

Ett objekt eller sakförhållande kan bara förstås och kommuniceras när det representeras och tolkas i någon form. Spänningsfältet mellan sakförhållandet, representation och tolkning gör därför semiotiken mycket intressant för matematikdidaktisk forskning. Det handlar om vilken mening människor tillskriver de olika tecken som de använder sig av inom matematiken. Lärande uppfattas som en *teckenprocess* (Hoffman 1996, 2000).

Vid IDM⁴ i Bielefeld arbetar en forskargrupp med att tillämpa Peirces semiotik inom matematikdidaktiken. Ett antal rapporter har publicerats under 1990-talet (t ex Hoffmann 1996, 2000; Hoffmann & Plöger 2000; Otte 1998; Otte, Hoffmann & Wolff 1994; Otte, Mies & Hoffmann 1997). Peirces arbeten kommer att diskuteras mera utförligt i avsnitt 4.

3.2 Sakförhållandet

Sakförhållandet, eller det matematiska objektet, är ett abstrakt eller idealt matematiskt objekt eller ett problem uppkommet ur vardags-erfarenheter. Det bör poängteras att semiotiken inte förutsätter en reell existens av ett objekt, det vill säga platonism. Som filosofisk position är platonismen högst problematisk (se Engström 2001).

Hypostasering innehåller både generaliserande och abstraherande processer i en utveckling till ett mentalt objekt, vilket hanteras av matematiker *som om* det existerade.

3.3 Representationens problem⁵

Ett matematiskt sakförhållande inte bara kan representeras⁶ på olika sätt, utan *måste* representeras på något sätt för att vi ska kunna operera eller handla (vanligtvis räkna) och därigenom omvandla det på något sätt. Genom att representera ett sakförhållande, tolkar vi det, det vill säga tilldelar det en mening. Ett matematiskt sakförhållande framställs (representeras externt) genom ett aritmetiskt uttryck, en ekvation eller olikhet, en integral eller differentialekvation. Genom ett regelstyrt opererande, det vill säga vi utför de aritmetiska operationerna (addition, subtraktion, etc), löser ekvationen, beräknar integralen, leder detta till nya framställningar av sakförhållandet, vars tolkning i den kontext vari sakförhållandet ges ger ny information om detta sakförhållande.

Vid de flesta matematiska aktiviteter sker vid sidan av en regelstyrd omformning av symboliska framställningar också en ”översättning” mellan olika framställningar. Att bedriva matematik innebär väsentligen också en interaktion mellan människa och framställningsform (på ett papper eller en bildskärm).

Därvid uppkommer ett antal frågor: Vad är det egentligen som framställs och hur framställs det inom matematiken? Normalt är det *abstrakta*, det vill säga något som inte är direkt tillgängligt för våra sinnen, *relationer*, till exempel ett tal som en kvantitativ relation, en ekvation som en relation mellan två variabla storheter, en funktion som en relation mellan elementen i två mängder. Dessa abstrakta relationer framställs genom skrivna symboler, eller kan numera också materialiseras som förnimbara objekt på en datorskärm. Abstrakta relationer kan också materialiseras genom skriftspråk.

Är de redan specifika abstrakta, som vi materialiserar i matematiska symboler, eller blir de först specifikt matematiska, genom att vi materialiserar dem på ett specifikt, matematiskt, sätt?

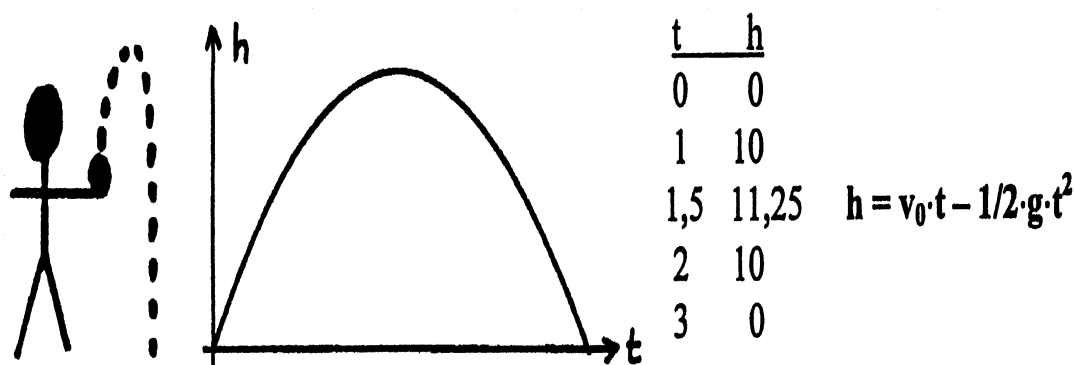
Det kan vara ekonomiskt att använda en och samma framställning för olika matematiska sakförhållanden, men varför använder man olika framställningsformer för att materialisera ett och samma matematiska sakförhållande.

Vad är det för mening att skilja mellan objekt och dess representation, alltså anta existensen av ett objektområde bortom dess materiella eller kognitiva framställningsformer (det vill säga bortom tecken och interpretant – se avsnitt 4)?

Olika framställningsformer

Man kan språkligt beskriva hur någon kastar upp en sten i luften, hur stenen allt långsammare stiger, verkar stanna i luften och sedan börjar att falla, allt snabbare och slutligen landar på marken.

Denna framställning kan också visas *visuellt*. Man kan här skilja mellan ikonisk, schematisk och symbolisk framställning.



Figur 3.1: Ikonisk, schematisk respektive symbolisk framställning (Pescheck 2000).

Den ikoniska framställningen gör en närmast kvasianalog beskrivning av sakförhållandet, i form av ett förenklat "fotografi".

Den schematiska framställningen fokuserar på relationen mellan tid och höjd. Tabellen gör det på ett diskret sätt och den grafiska framställningen på ett kontinuerligt sätt. Båda framställningarna abstraherar från bestämda aspekter av sakförhållandet, något som fortfarande kan ses i

den ikoniska framställningen, att ett föremål kastas upp och vilket föremål det handlar om och av vem det kastas.

Den symboliska framställningen går ett stycke längre. Den visar att förhållandet mellan tid och höjd är kvadratisk, samt på vilket sätt höjden är beroende av utgångshastigheten och gravitationskraften. Den ger också möjlighet som de andra framställningsformerna saknar att genom en regelstyrd omformning få fram utgångshastigheten ur tid och höjd.

Det som skiljer de olika framställningsformerna åt är:

- *Ikonisk framställningsform* hänför sig till reellt synbara omständigheter och kan ge en första inblick i ett sakförhållande, stimulera associationer och vara utgångspunkt för utvecklingen av schematiska framställningar, men tillhör egentligen inte matematikens område. Ikoniska framställningar används sällan i matematiska texter.
- *Schematiska och symboliska framställningsformer* finner man däremot i varje lärobok i matematik, varför man måste förutsätta att de vid sida av språkliga framställningar är särskilt viktiga för matematik och lärandet i matematik. Genom dessa framställningsformer görs vissa aspekter av ett sakförhållande mer intressanta än andra. Man måste kunna "läsa" sådana framställningsformer, särskilt måste man veta vad man abstraherar från.

Medan schematiska framställningar ofta refererar till förnimbara mönster i referenskontexten och abstrakta relationer framställs med hjälp av förbindningslinjer, pilar och så vidare, så framställs sådana relationer i symboliska framställningar i formaliserad form, det vill säga med symboler. Betydelsen av symboler måste överenskommas eller förhandlas. Symbolerna görs ofta generella genom att *en* bestämd symbol får stå för *alla* reella tal, *alla* punkter, eller *alla* integrerbara funktioner. Övergången till detta symboliska plan kan beskrivas som ett uttryck för *generalisering*.

En annan skillnad är att med symboliseringen följer en ökad rörlighetsgrad. Ytterligare en skillnad är att medan ikoniska och schematiska framställningar lämnar en större utrymme för skilda tolkningar, så är innebörden i symboliska framställningar mer fastlagda, men också mer villkorade (Jag kallar denna funktion g.).

För matematikens del är de båda framställningsformerna viktiga, framför allt karakteriseras matematiskt arbete av en växling mellan schematiska och symboliska framställningar.

Das Wechselspiel zwischen schematischer und symbolischer Darstellung entspricht etwa dem Wechselspiel zwischen Intuition, Einsicht, Ideengewinnung einerseits und syntaktischer Rechtfertigung, Kontrolle, Auswertung andererseits (Fischer 1984, s 157 citerat i Peschek 2000, s 8).

Den ovanstående diskussionen leder till en rad frågor om förhållandet mellan sakförhållande och framställning:

- Hur kan man bortom representationen föreställa sig ett sakförhållande?
- Finns det över huvud taget ett matematiskt sakförhållande, en abstrakt relation, utan representation och hur är det i så fall "närvarande"?
- "Existerar" inte ett matematiskt sakförhållande först genom dess representation, vilket innebär att det är meningslöst att tala om representation *av* något abstrakt? Är inte framställningar mer representation *för* något abstrakt?
- Om man, på goda grunder, vill undvika att likställa abstrakta relationer och dess kognitiva eller materiella representationer, måste man formulera det annorlunda:
- Konstituerar sig inte en abstrakt relation, det vill säga ett matematiskt objekt, först genom handhavandet med representationen och skapar sig en existens också genom denna?

Av stort intresse för ovanstående diskussion är användningen av datorer. Den är för det första en specifik form av framställning och materialisering av matematik, och för det andra kräver och producerar den vissa framställningar av matematiska sakförhållanden. Förstärker datorer problemet med förhållandet mellan sakförhållandet och framställningen?

Man betonar ofta möjligheten av att kunna experimentera med olika framställningar och simulera olika utfall, det vill säga framställningar. Den snabba tillgängligheten till och växlingar mellan olika framställningar anses av många stimulera och befrämja begreppsförståelsen och matematisk kreativitet. Ännu måste detta uppfattas som en hypotes att pröva.

Representation som föreställning

Att förstå någonting innebär att kunna representera detta någonting, internt (föreställning) och externt. Varje kunskap yttrar sig eller förmedlas genom en intern representation, som föreställningar och betydelser. Tecken kan förstås både som intern och extern representation. Man kan från semiotisk synvinkel förstå lärandet som en process av tillägnelse och utveckling av representationssystem (Hoffmann & Seeger 2000).

3.4 Tolkning

För att förstå och kommunicera ett matematiskt sakförhållande måste det representeras på något sätt, både internt och externt. Att representera innebär att tolka. Vi tilldelar de tecken vi använder för att representera sakförhållanden en viss mening. För att vi ska kunna förstå varandra, det vill säga för att kommunikationen ska bli framgångsrik och rationell, måste det finnas en viss *ömsesidighet* och *kongruens* i denna meningstilldelning.

Att studera tolkningsprocessen är att fråga sig hur matematik kunskap, som är både nödvändig och universell, kan utvecklas; hur utvecklas en kunskap som är både *intersubjektiv*, det vill säga alla kan utveckla och därmed äga den, och *självidentisk*, det vill säga det är samma kunskap som förvärvas av alla dem som förvärvar den? Ur matematikdidaktisk synvinkel blir det intressant att kunna modellera denna meningstilldelning semiotiskt.

4. Charles S Peirces semiotik

Charles Sanders Peirce (1839–1914) var grundare av pragmatismen och anses vara en av den nordamerikanska kontinentens största filosofer. Jag ska här diskutera Peirces teckenbegrepp samt det viktiga abduktionsbegreppet. Abduktion kan ses som ett svar på frågan hur ny kunskap utvecklas.

Abduction is the process of forming an explanatory hypothesis. It is the only logical operation which introduces any new idea (Peirce 1903: CP 5.171 citerad i Hoffmann 1997).

Därmed ges ett möjligt svar på den så kallade inlärningsparadoxen.⁷

4.1 Teckenbegreppet

Peirces teckenteori⁸ är mycket komplex och differentierad. Den innehåller en klassificering av olika teckenrelationer. Avsikten är att karaktärisera alla de möjliga sätt som vi lär känna och representerar världen på, vare sig detta gäller emotioner, som kan uppstå när man betraktar en blomma, eller vetenskapliga teorier.

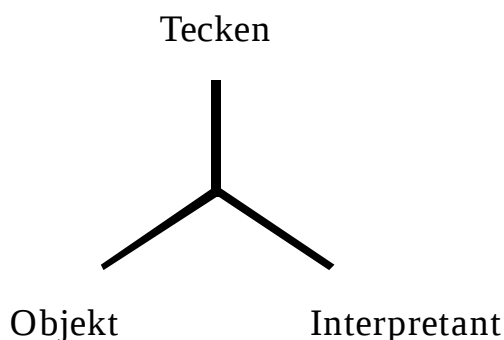
Peirce har sina filosofiska rötter hos Kant. Ett gemensamt drag hos dem är att verkligheten framträder i några grundläggande kategorier inom ramen för vilka den först blir uppfattbar. Vi kan enligt Kant inte veta något om tinget *i sig*. För Peirce är världen endast tillgänglig för oss genom en förmedling via tecken. Föremål har ingen betydelse *i sig*. För tolkare av världen finns inga föremål, bara tecken. Tecken förmedlar mellan subjekt och objekt.

För Peirce råder det ett *triadiskt* förhållande mellan tecken, objekt och interpretant.

Ett tecken är något som för någon står för något i viss bemärkelse eller kapacitet. Det är riktat till någon, det vill säga skapar ett motsvarande tecken i personens medvetande, eller möjligen ett mer utvecklat tecken.

Tecknet som det skapar kallar jag *interpretanten* av det första tecknet.
Tecknet står för något, dess *objekt* (Peirce, citerat i Fiske 1990, s 63).

Följande figur kan illustrera detta förhållande:



Figur 4.1: Förhållandet mellan tecken, objekt och interpretant hos Peirce.

Tecken har en föremålslik sida, en materiell komponent (till exempel symboler på ett papper). En annan sida hänför sig till att tecken har en kulturhistorisk framvuxen och i en social interaktion manifesterad betydelse.

Ett objekt kan representeras genom olika tecken, och varje tecken kan tolkas olika. Möjligheterna till tolkning skiljer sig från person till person. Det innebär att en klassifikation av tecken inte handlar om att sortera bestämda tecken i olika lådor. Det är alltid en fråga om vad det enskilda tecknet betyder för en viss person. Därav följer teckentolkningens perspektivitet. Teckenbegreppet definieras genom att den triadiska teckenrelationen aldrig föreligger avslutad utan alltid är inbunden i en teckenprocess.

Peirce arbetar med tre fundamentala kategorier, etthet (*firstness*), tvåhet (*secondness*) och trehet (*thirdness*). Dessa kategorier ersätter Kants kategorier och är grundläggande för Peirces kunskapsteori.

Alla fenomen i verkligheten uppfattas antingen som enskilda eller också som delade på två eller tre element. Ettheten bildar utgångspunkt. Den är något i sig själv. Tvåheten är något som står i relation till det förra och treheten är en förmedling av de båda andra.

Tecknet är ett exempel på trehet och består av tre led: *representamen*, *objekt* och *interpretant*; eller uttryck, innehåll och tillämpningens särart.

Varje tecken kan kategoriseras i enlighet med de tre sätt på vilka var och en av de tre leden kan skifta: efter uttryckets egen natur, det slags relation som sammanbinder uttryck och innehåll och tillämpningens särart (Sonesson 1992). Vi kan beskriva detta med figuren nedan:

Trichotomy Category	I. of the representamen	II. of relation of object	III. of relation to interpretant
Firstness	qualisign	icon	rheme
Secondness	sinsign	index	dicent
Thirdness	legisign	symbol	argument

Figur 4.2: Peirces teckenklasser (Nöth, 1990).

Interpretanten är inte tecknets användare utan syftar på ”den egentliga betecknande effekten” (Peirce, citerat i Fiske, 1990, s 63). Interpretanten av tecknet är resultatet av användarens erfarenhet av tecknet och de sammanhang där detta ingår. Gränserna sätts av sociala konventioner. Variationerna inom dessa är en fråga om sociala och psykologiska skillnader mellan användarna (Fiske, 1990).

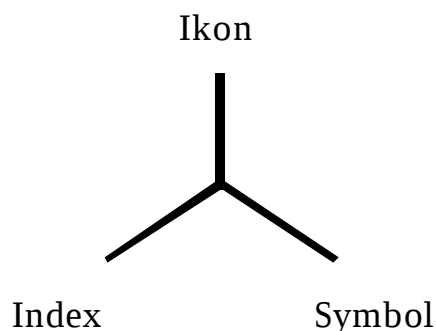
Den triadiska strukturen i Peirces teckenbegrepp motsvaras för vår del av spänningsfältet mellan det matematiska sakförhållandet, representationen och tolkningen, vilket jag diskuterat i avsnitt 3.

Varje teckendimension (objektet, tecknet för sig och interpretanten) kan differentieras på tre olika sätt.

Objektrelationen

Peirce skiljer mellan tre olika objektrelationer *ikon*, *index* och *symbol*. En ikon liknar objektet på något sätt; i ett index finns ett direkt samband i verkligheten mellan tecknet och objektet; i en symbol saknas både likhet och samband. Ett fotografi är en ikon, rök ett index som är kopp-

lat till (indikerar) eld och ett ord är en symbol (Fiske 1990). Även tecken-typerna kan visas i en triadisk modell.



Figur 4.3: Förhållandet mellan ikon, index och symbol enligt Peirce.

Tecknet

När man betraktar tecknet för sig skiljer Peirce mellan *qualitecken*, *sintecken* (av *singulär*) och *legitecken* (av latinets *lex*). Senare använder sig Peirce även av beteckningar, tone, token och type. Ett qualitecken är en kvalitet som ett tecken kan anta. Det kan inte fungera som ett tecken förrän det är förkroppsligat. Ett sintecken är en faktiskt existerande sak eller händelse som är ett tecken. Ett legitecken är en lag som är ett tecken. En sådan är normalt uppställd av människor. Varje konventionellt tecken är ett legitecken, men det omvända gäller inte.

Interpretantrelationen

Den tredje teckendimensionen avser de sätt på vilket en interpretant representerar ett tecken. Här skiljer Peirce mellan *rhema* (av grekiskans ord), *dici* (anspelar på satsen) och *argument* (anspelar på ett argumentativt sammanhang av satser).

Förmågan till varseblivning och tolkning av tecknen är inget givet, utan kan vara ganska olika. Det ger varseblivningen och tolkningen en hypotetisk karaktär. Varje varseblivning och tolkning uppfattas som bildandet av en hypotes, eller som resultatet av en abduktion.

4.2 Abduktion

Abduktion innebär en tredje slutledningsform vid sidan av deduktion och induktion. Begreppet är mycket centralt hos Peirce och kan sägas representera ett svar på frågan hur ny kunskap utvecklas.

Peirces författarskap sträcker sig över en tämligen lång period på 60 år. Som för de flesta författare som arbetar över en så lång period så förekommer det över tiden motstridiga påståenden. Olika termer används för att beskriva eller benämna samma fenomen och centrala begrepp genomgår en utveckling.

Runt 1890 inträffar ett brott i hur Peirce uppfattar abduktion. Det förekommer vid den här tiden motstridiga uppfattningar, å ena sidan abduktion som en intuitiv slutledning och å den andra sidan abduktion som en logisk slutledning. Drygt 10 år senare skriver Peirce att han blandade ihop abduktion och intuition (se Kirkeby 1994, för en redogörelse).

Den vanligast citerade definitionen av abduktionsbegreppet är:

Ett överraskande faktum, C, observeras;
Men om A vore sant, så skulle C vara en självklarhet;
Följaktligen finns det skäl att anta att A är sant.

Man kan således inte abduktivt sluta sig till A eller – om ni föredrar den formuleringen – man kan inte abduktivt gissa sig till A förrän dess hela innehåll redan är närvarande i premissen: ”Om A vore sant, så skulle C vara en självklarhet.” (Peirce 1990, s 237).

I en annan ofta citerad definition sätts abduktion över deduktion och induktion som slutledningsform:

Deduktion

Lag: Alla bönor i påsen A är vita.
Faktum: Bönorna på bordet kommer från påsen A.
C-resultat: Bönorna på bordet är vita.

Induktion

Resultat: Bönorna på bordet är vita.
Faktum: Bönorna på bordet är från påsen A.
C-lag: Alla bönorna i påsen A är vita.

Abduktion

Lag: Alla bönorna i påsen A är vita.
Resultat: Bönorna på bordet är vita.
C-faktum: Bönorna på bordet är från påsen A (och inte från påsarna B, C...).

(Peirce citerad i Kirkeby 1994, s 148f).

I den första definitionen är abduktionen en slutledning till en lagbundenhet, i form av en hypotes. I den andra en slutledning till ett faktum.

Abduktion kan uppfattas både som principer för vardagslivets vetande och det vetenskapliga vetandets speciella principer. Om det går att skapa en systematik för abduktionen blir den till en teori om sambandet mellan vardagsspråket och vetenskapens språk (se Kirkeby 1994 för en diskussion om detta). Därmed bortfaller problemet med att en hypotes är något man väljer eller konstruerar, skriver Kirkeby (1994). Vardagsspråket är den värld som avgränsar möjliga hypoteser. Därigenom kan man finna ett begrepp, eller en samling av begrepp eller en uppsättning relationer i vardagsspråket som föregriper varje vetenskaplig hypotes, framhåller Kirkeby. Även om begreppen är språkligt vaga, kan de vara tydliga som mentala föreställningar.

5. Avslutning

Tecken och representationer spelar en avgörande roll inte bara i matematikundervisningen utan också inom matematiken. Genom att studera kommunikationsprocessen ur ett semiotiskt perspektiv överskrids de begränsningar som finns i traditionella kommunikationsstudier där man fokuserar på språkanvändningen.

Den matematiska praktiken liksom det matematiska tänkandet är huvudsakligen *icke-språkligt*. Det blir uppenbart när man tänker på förmågan att strukturera matematiska problem eller sakförhållanden. Spatialt, diagrammatiskt och relationellt tänkande, vilka kännetecknar den matematiska tankeprocessen, kan inte representeras språkligt.

Att betrakta matematikdidaktiska frågeställningar semiotiskt har därför klara fördelar. Därmed kan representationer av matematiska sakförhållanden, tolkningen och hur dessa kommuniceras tematiseras och därmed också grundläggande frågor kring rationalitet och intersubjektivitet.

Matematikdidaktiken behöver utveckla semiotiska modeller för att förstå hur rationalitet och intersubjektivitet uppkommer i kommunikationsprocessen.

Noter

- ¹ Traditionellt skiljer man mellan *nomotetiska* vetenskaper, till exempel naturvetenskaperna, som syftar till att etablera allmänna lagar och principer, och *ideografiska* vetenskaper, till exempel humanvetenskaperna, som syftar till att beskriva vissa unika företeelser.
- ² För en djupare framställning om semiotiken, dess ledande teoretiker och grundbegrepp hänvisas till Winfried Nöths (2000) omfångsrika handbok.
- ³ Frågan om allmänbegreppen (till exempel tecken) är *universalia*, det vill säga har en egen existens eller ej utgör innehållet i den så kallade universaliastriden. Här utkristalliserade sig historiskt två motsatta ståndpunkter. En, kallad realism, hävdade att allmänbegreppen har en egen och självständig existens utanför det mänskliga vetandet. Företrädare för realismen är bland andra Platon, Frege, men också nutida vetenskapsfilosofer som Karl Popper. Den motsatta ståndpunkten brukar kallas nominalism, det vill säga *universalia* är bara namn på egenskaper. Till sentida företrädare räknas, bland annat Russell och den sena Wittgenstein. Wilhelm av Ockham, en av realismens radikalaste kritiker under medeltiden, föregriper i sin kritik en tredje ståndpunkt som benämns *konceptualism*, det vill säga *universalia* existerar som begrepp (mentala storheter) som har framkommit genom abstraktion.
- ⁴ IDM, Institut für Didaktik der Mathematik, är ett interdisciplinärt forskningsinstitut, som grundades 1973 genom anslag från Volkswagenwerks forskningsstiftelse. Här finns ett av de största dokumentationscentra när det gäller matematikdidaktisk forskning i världen. Antalet periodica uppgår till runt 160 och monografierna omfattar c:a 40 000 band. Institutet leds av professor Michael Otte. Institutet har spelat en avgörande roll i utvecklingen av den tyska matematikdidaktiska forskningen.

- ⁵ Min framställning här bygger i stora delar på Pescheck (2000).
- ⁶ Den engelska termen *representation* har en tvetydig innebörd som motsvaras av de tyska *Darstellung* och *Vorstellung*, det förra motsvaras av *extern representation* och det senare av *intern representation*. Inom traditionell kognitiv teori är den interna representationen en återspeglning av verkligheten. Utvecklingen inom neurovetenskapen gör det dock svårt att framhärda i en sådan position, då hjärnans processer styrs av interna regler. Kunskap är *embodied*, det vill säga knuten till vår hjärnas (och kropps) speciella sätt att fungera. Det går inte att göra någon skarp åtskillnad mellan *mind* och *body*.
- ⁷ En central fråga för varje teori om lärande är att besvara hur *ny* kunskap utvecklas. Ursprungligen finns inlärningsparadoxen formulerad i Platons dialog om Menon. Man kan inte söka efter något man vet, men inte heller efter något man inte vet. Vet man något, så söker man inte detta. Man vet det och behöver således inte söka efter det. Det man inte vet, kan man inte heller söka efter, eftersom man inte vet vad man söker. I ett svar på Menons paradox hävdar Sokrates att forskande och lärande inte är annat än erinring. Med sin speciella samtalskonst (majevtik) ansåg sig Sokrates kunna förlösa ett vetande som redan fanns. Genom eftertanke skulle det som tidigare var dunkelt nu framträda i full dager.
- Det är viktigt att uppmärksamma en viktig skillnad i Menons paradox och det som i modern tid kommit att diskuteras som inlärningsparadoxen. Hos Platon är frågan om kunskap och ickekunskap knuten till objektet. Kunskapsobjektet är idéerna. Sann kunskap är kunskap om objektens väsen. Efter Kants kopernikanska vändning har vi en diskussion om *sätten* att erhålla kunskap. Därför bör paradoxen ses i ljuset av den kritik som riktats mot Piagets utvecklingsstadier. Hur kan man med de kognitiva medel som finns i ett utvecklingsstadium bilda starkare kognitiva strukturer, vilka inte kan deduceras ur det föregående stadiet eller som kan vinnas genom induktion av erfarenheter?
- ⁸ Framställningen bygger i huvudsak på Hoffmann (2001) om inte annat anges.

Referenser

- Engström, Arne (2001): *Rationalitet och intersubjektivitet – Om matematikundervisningens kommunikativa karaktär*. Arbetsrapporter vid Pedagogiska institutionen, 4. Örebro universitet.
- Fischer, Roland (1984): Offene Mathematik und Visualisierung. *Mathematica Didactica*, 7(3/4), s 139–160.
- Fiske, John (1990): *Kommunikationsteorier. En introduktion*. Stockholm: Wahlström & Widstrand.
- Frege, Gotlobb (1995): *Skrifter i urval: Funktion och begrepp* [Funktion und Begriff, 1891]. Stockholm: Thales.
- Frege, Gotlobb (1995): *Skrifter i urval: Om mening och betydelse* [Über Sinn und Bedeutung, 1892]. Stockholm: Thales.
- Frege, Gotlobb (1995): *Skrifter i urval: Tanken* [Der Gedanke: eine logische Untersuchung, 1918]. Stockholm: Thales.
- Hoffmann, Michael (1996): *Eine semiotische Modellierung von Lernprozessen. Peirce und das Wechselverhältnis von Abduktion und Vergegenständlichung*. Occasional paper, 160. IDM, Universität Bielefeld.
- Hoffmann, Michael (1997): *Is there a “logic” of abduction*. Bidrag presenterat vid The 6th Congress of the IASS-AIS, International Association for Semiotic Studies in Guadalajara, Mexico, 13–18 juli, 1997.
- Hoffmann, Michael (2000): Die Paradoxie des Lernens und ein semiotischer Ansatz zu ihrer Auflösung. *Zeitschrift für Semiotik*, 22(1), s 31–50.
- Hoffmann, Michael (2001): *Triadische Zeichenrelation nach Charles S Peirce*. Bidrag presenterat vid GDM-AK Semiotik in der Mathematikdidaktik, Neresheim, 25–27 september 2001. http://www.uni-bielefeld.de/idm/semiotik/Peirces_Zeichen.html.
- Hoffmann, Michael & Plöger, Marcel (2000): Mathematik als Prozess der Verallgemeinerung von Zeichen: Eine exemplarische Unterrichtseinheit zur Entdeckung der Inkommensurabilität. *Zeitschrift für Semiotik*, 22(1), s 81–114.

- Hoffmann, Michael & Seeger, Falk (2000): *Semiotik in der Mathematikdidaktik. Ein Instrument für eine Didaktik des 21. Jahrhunderts* [Positionspapier]. http://www.uni-bielefeld.de/idm/semiotik/Positionspapier_AG-Semiotik.html.
- Hoffmeyer, Jesper (1997): *Livstecken. Betydelsens naturhistoria*. Stockholm: Bonnier Alba.
- Kirkeby, Ole Fogh (1994): Abduktion. I Heine Andersen, red: *Vetenskapsteori och metodlära. En introduktion*, s 143–180. Lund: Studentlitteratur.
- Nöth, Winfried (1990): *Handbook of semiotics*. Bloomington: Indiana University Press.
- Nöth, Winfried (2000): *Handbuch der Semiotik* [2, vollständig neu bearbeitete und erweiterte Auflage]. Stuttgart: Verlag J B Metzler.
- Otte, Michael (1998): Limits of constructivism: Kant, Piaget and Peirce. *Science & Education*, 7(5), s 425–450.
- Otte, Michael; Hoffmann, Michael & Wolff, Michael (1994): *Die Philosophie der Mathematik bei Charles S Peirce im Kontext seines "evolutionären Realismus"*. Zum Peirceschen Kontinuitätsprinzip. Occasional paper, 155. IDM, Universität Bielefeld.
- Otte, Michael; Mies, Thomas & Hoffmann, Michael (1997): *Die Symmetrie von Subjektbezug und Objektivität wissenschaftlicher Verallgemeinerung. Untersuchung zur Begründung wissenschaftlicher Rationalität im Anschluß an die mathematische Philosophie von Charles S Peirce*. Occasional paper, 162. IDM, Universität Bielefeld.
- Peirce, Charles Sanders (1990): *Pragmatism och kosmologi*. Göteborg: Daidalos.
- Peschek, Werner (2000): *Anmerkungen zur Vielfalt der Darstellung und zur Rolle der Computer*. Vortragsmanuskript der GDM-AK Semiotik Soest, 22.9. 2000. [Opublicerat.]
- Rotman, Brian (1987): *Signifying nothing. The semiotics of zero*. London: Macmillan Press.
- Seeger, Falk (2000): Lernen mit graphischen Repräsentationen: Psychologie und semiotische Überlegungen. *Zeitschrift für Semiotik*, 22(1), s 51–80.
- Selter, Christoph & Spiegel, Hartmund (1997): *Wie Kinder rechnen*. Leipzig u a: Ernst Klett Grundschulverlag.
- Sonesson, Göran (1987): *Bildbetydelser i informationssamhället – några preciseringar till grundbegreppen*. Rapport 2 från

Semiotikprojektet. Lunds universitet, institutionen för
konstvetenskap.

Sonesson, Göran (1989): *Pictorial concepts. Inquiries into the
semiotic heritage and its relevance for the analysis of the visual
world*. Lund: Lund University Press.

Sonesson, Göran (1992): *Bildbetydelser. Inledning till bildsemiotiken
som vetenskap*. Lund: Studentlitteratur.

Sällström, Pehr (1991): *Tecken att tänka med*. Stockholm: Carlssons.

Thompson, Jan (1991): *Historiens matematik*. Lund:
Studentlitteratur.

Arbetsrapporter vid Pedagogiska institutionen, Örebro universitet

1. Engström, Arne (1999): *Matematikdidaktiska avhandlingar i Sverige 1990-1998.*
2. Engström, Arne (1999): *Specialpedagogiska frågeställningar i matematik.*
3. Quennerstedt, Ann (2001): *Likvärdig utbildning i kommunalpolitiskt perspektiv.*
4. Engström, Arne (2001): *Rationalitet och intersubjektivitet – Om matematikundervisningens kommunikativa karaktär.*
5. Hagström, Eva, red (2002): *Pedagogiska perspektiv – Artiklar från en universitetsdidaktisk kurs.*
6. Engström, Arne (2002): *Semiotik och matematikdidaktik – En introduktion.*