



Pedagogiska institutionen

## MEDELSTA-MATEMATIK III

ELEVERNA RÄKNAR

Arne Engström  
Olof Magne

RAPPORTER FRÅN PEDAGOGISKA INSTITUTIONEN,  
ÖREBRO UNIVERSITET, 12

Distribution: Örebro universitet  
Pedagogiska institutionen  
701 82 Örebro  
Telefon: 019-30 30 00  
Fax: 019-30 32 59  
E-post: forsknsekr@pi.oru.se

© Pedagogiska institutionen, Arne Engström & Olof Magne, 2006  
Titel: Medelsta-matematik III – Eleverna räknar

Utgivare: Örebro universitet,  
Pedagogiska institutionen

Tryck: Intellecta DocuSys AB, Västra Frölunda 2006

ISSN: 1650-0652  
ISBN: 91-7668-468-7

Arne Engström  
Olof Magne

## MEDELSTA-MATEMATIK III

ELEVERNA RÄKNAR

### - SAMMANFATTNING -

Föreliggande studie utgör del III av undersökningarna om Medelsta-matematik. Den första delen publicerades 1990 och omfattade undersökningsåren 1977 och 1986. En andra del omfattande åren 1977, 1986 samt 2002 publicerades 2003. I del III presenteras en fördjupad undersökning av de 15 procent lägst presterande eleverna i Medelsta. I rapporten betecknas dessa elever som elever med särskilda utbildningsbehov i matematik, SUM.

I 2003 års studie redovisades att den genomsnittliga prestationen för den 15 procent lägst presterande vid slutet av årskurs 9, motsvarade en genomsnittselev i årskurs fyra. Dessa skillnader i elevernas färdigheter kan observeras tidigt. I årskurs 3 motsvarar SUM-elevernas genomsnittliga prestationer vad en normal elev i årskurs 1 presterar. Skillnaderna ökar under skollåren och när SUM-eleverna nått slutet av grundskolan är de för länge sedan utslagna från skolans matematikundervisning.

I rapporten redovisas också en jämförelse mellan elever med relativt sett höga prestationer och SUM-elever samt en kvalitativ studie av SUM-elevernas matematikkunskaper.

En genomgripande förändring synes nödvändig omfattande skolans styrdokument, existerande undervisningspraxis i riktning mot vardagskunskaper samt en satsning på utvecklingsarbete och forskning om undervisning av SUM-elever.

**Nyckelord:** grundskola, konstruktivism, läroplan, matematik, särskilda utbildningsbehov, vardagsmatematik.



---

# INNEHÅLL

## KAPITEL 1

|                                                                               |    |
|-------------------------------------------------------------------------------|----|
| INLEDNING .....                                                               | 7  |
| 1.1 Matematikundervisning i stöpsleven .....                                  | 8  |
| 1.2 Att avvika från normen .....                                              | 9  |
| Att kunna eller inte kunna ... beror på läroplanen<br>och betygssystemet..... | 11 |
| 1.3 Tidigare forskning om de lägst presterandes<br>matematikkunskaper .....   | 11 |
| 1.4 Rapportens uppläggning.....                                               | 15 |

## KAPITEL 2

|                                                                                  |    |
|----------------------------------------------------------------------------------|----|
| ÅTER TILL MEDELSTA .....                                                         | 17 |
| 2.1 Medelsta-undersökningen.....                                                 | 18 |
| 2.2 Hur påverkar läroplanen kunskapsutvecklingen<br>för Medelsta-eleverna? ..... | 20 |
| 2.3 SUM-eleverna i Medelsta .....                                                | 22 |
| 2.4 Det speciella fallet med Diagnos 8 .....                                     | 24 |
| 2.5 Sum-elever och icke-SUM-elever .....                                         | 30 |

## KAPITEL 3

|                                                                                                                       |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| EN KONTRASTERANDE STUDIE MELLAN ELEVER MED RELATIVT SETT HÖGA<br>OCH SUM-ELEVER MED SPECIELLT LÅGA PRESTATIONER ..... | 37 |
| 3.1 Felstudier .....                                                                                                  | 38 |
| 3.2 Resultaten i de årskurstypiska uppgifterna .....                                                                  | 40 |

## KAPITEL 4

|                                                               |    |
|---------------------------------------------------------------|----|
| SUM-ELEVERNAS MATEMATIKKUNSKAPER – EN KVALITATIV ANALYS ..... | 45 |
| 4.1 Kursplanen och inlärningssteorin .....                    | 46 |
| 4.2 Matematikprestationernas fördelningsform .....            | 48 |
| Årskurs 9 .....                                               | 49 |
| Årskurs 1 .....                                               | 55 |
| Årskurs 5 .....                                               | 60 |
| Årskurs 4 .....                                               | 66 |
| 4.3 Faktorsamspels-modellen: ”MIO, min MIO” .....             | 71 |

---

## KAPITEL 5

|                                                                        |    |
|------------------------------------------------------------------------|----|
| VART HAR VARDAGSMATEMATIKEN TAGIT VÄGEN? .....                         | 73 |
| 5.1 Livsmatematik – ett delmål i skolans matematikundervisning .....   | 74 |
| 5.2 Vad kan eleverna om livsmatematik – vardagslivets matematik? ..... | 75 |
| Algoritmerna som bara var tredje kan – eller inte ens det....          | 76 |
| 5.3 Birgit och hennes gäng – Om utslagna och deras livsmatematik ..... | 76 |
| Hur lär sig elever i skolan? .....                                     | 78 |
| Vad är vardagsmatematik? – Hur räknar svenska folket? ...              | 79 |
| 5.4 Bergendals två flaskor .....                                       | 81 |
| 5.5 En pedagogisk paradox .....                                        | 83 |
| 5.6 En kursplan i livsmatematik (vardagsmatematik) .....               | 86 |

## KAPITEL 6

|                                                            |    |
|------------------------------------------------------------|----|
| MOT EN FÖRÄNDRAD MATEMATIKUNDERVISNING I GRUNDSKOLAN ..... | 89 |
| 6.1 Konkret matematik .....                                | 90 |
| 6.2 Hur ändra SUM-undervisningen? .....                    | 92 |
| 6.3 Matematikklinikförsöket .....                          | 93 |

## KAPITEL 7

|                                           |     |
|-------------------------------------------|-----|
| AVSLUTANDE KOMMENTARER .....              | 97  |
| 7.1 Att räkna med olikheter .....         | 98  |
| 7.3 Integrering vs segregering .....      | 100 |
| 7.4 En inkluderande skola .....           | 101 |
| 7.5 Kunskapsläget och handlingsplan ..... | 102 |

|                  |     |
|------------------|-----|
| REFERENSER ..... | 105 |
|------------------|-----|

# KAPITEL 1

## INLEDNING

## 1.1 MATEMATIKUNDERVISNING I STÖPSLEVEN

I samband med den andra nordiska forskarkonferensen om matematiksvårigheter som hölls vid Örebro universitet i början av oktober 2003 presenterades den andra delen av Medelsta-studien (Engström & Magne 2003). Den första delen, som omfattade 1977 och 1986 års undersökningar, publicerades 1990 (Magne 1990b). Det är en av de mest omfattande undersökningar av grundskoleelevers matematikprestationer som genomförts i Sverige. Studien väckte berättigad uppmärksamhet i massmedia när den fokuserade på några centrala problem i skolans matematikundervisning, bland annat utslagningen av elever med låga prestationer i grundskolan. Situationen för denna grupp är ytterst prekär.

Medelsta är pseudonym för en genomsnittlig svensk kommun som valts ut för att representera ett "medelsverige". I Medelsta testades samtliga grundskoleelever vid tre olika tillfällen 1977, 1986 och 2002. Under den här perioden på 25 år var tre olika läroplaner i kraft, Lgr 69, Lgr 80 samt Lpo 94. De sociala och kulturella förändringar som skett i landet under denna period har också skett i Medelsta. Vi har i studien kunnat följa förändringar av skolans matematikundervisning och i undervisningens utfall över perioden. De många förhoppningar om en förändrad matematikundervisning som knöts till läroplansreformerna har knappast infriats. I stället är det stabiliteten i skolans matematikundervisning som är det mest påfallande.

Under de två år som gått sedan studien publicerades har resultaten från andra undersökningar, såsom Matematikdelegationens betänkande (SOU 2004:97), den nationella utvärderingen av grundskolan (Skolverket 2004a), PISA (Skolverket 2004b) och TIMSS (Skolverket 2004c), lett till en omfattande diskussion och ett ifrågasättande av skolans matematikundervisning. Fram har trätt bilden av en skola i djupt förfall. Det kan dock på goda grunder ifrågasättas om grundskoleelevernas matematikkunskaper har försämrats så drastiskt som görs gällande i massmediadebatten. Ingen av de undersökningar som nämnts ovan ger något entydigt stöd för detta. Medelsta-studien pekade tvärtom på den anmärkningsvärda stabiliteten över 25 års tid av grundskoleelevernas matematikkunskaper. Detta betyder dock inte att skolans matematikundervisning skulle vara utan problem, tvärtom.

I föreliggande rapport ska en fördjupad analys av matematikprestationerna för de 15 procent lägst presterande eleverna i Medelsta presenteras.

## 1.2 ATT AVVIKA FRÅN NORMEN

Ett grundläggande dilemma i alla utvecklade länder är hur utbildnings-systemet ska hantera elever som avviker från den socialt-politiskt utvecklade normen, antingen genom sina mycket svaga eller starka prestationer som de uppvisar i den grundläggande matematikundervisningen. Dilemmat kan inte lösas, bara hanteras. I vissa länder har man särskilda klasser eller skolor för dessa olika grupper. I andra länder, som Sverige, negligeras dessa elever i stor utsträckning. Begåvade elever i matematik och elever som av olika skäl inte klarar skolmatematiken är två olika sidor av samma mynt.

Det har riktats kritik mot Medelsta-studien från ledande matematiker vid några av landets universitet för att vi inte har uppmärksammat situationen för elever med höga prestationer i grundskolan. Det är korrekt såtillvida att en viktig avgränsning därvid har gjorts i Medelsta-studien. Elever med höga prestationer har inte varit föremål för någon analys. De tester, Medelsta-diagnoserna, som har använts har bara omfattat de elementära delarna av grundskolans stoff. Att vi inte behandlar elever med höga prestationer i matematik betyder inte att vi skulle vara av den uppfattningen att situationen för dessa elever skulle vara tillfredsställande eller att ”de klarar sig alltid”. Tvärtom menar vi att elever med mycket höga prestationer måste ges en särskild uppmärksamhet i skolan. Den forskning som finns på området (se till exempel Käpnick 1998 och Stamm 2005) pekar på problemet med eftersatta matematikbegåvningar som underpresterar eller till och med misslyckas i matematik. Däremot är det fel att ställa satsningar på elever med särskilt låga respektive höga prestationer mot varandra.

Paradoxalt har den ökade uppmärksamheten på brister i skolans matematikundervisning lett till att elever med mycket låga prestationer glömts bort. I Matematikdelegationens utförliga genomgång av skolans matematikundervisning lyser dessa elever med sin frånvaro. Delegationen gör ett antal principiella ställningstaganden. Bland annat framhålls att alla elever ska erbjudas en likvärdig matematikutbildning. Man framhåller att detta inte innebär att alla skall få samma undervisning, tvärtom förutsätter den en varierad undervisning där hänsyn tas till de studerandes särskilda möjligheter eller svårigheter. Det är ett av de få ställen där dessa elever explicit behandlas i texten. Vidare skriver man:

Det är vår övertygelse att alla barn och ungdomar som kan klara en normal skolgång i övrigt också har förutsättningar att tillgodogöra sig skolans matematikämne och nå uppställda mål, om de får utbildning av kompetenta lärare i en för alla god arbetsmiljö. En god och relevant matematikutbildning skall erbjudas alla (SOU 2004:97, s 82).

Hittills har inget utbildningssystem i världen lyckats med detta. Tyvärr är det så att matematikdelegationen i stort sett negligerar elever med mycket svaga prestationer. Talar man inte om dem, så finns de inte.

Misslyckanden i matematik är ett stort problem i våra skolor. För att få en uppfattning av hur stort problemet är kan vi studera resultaten på det nationella ämnesprovet i matematik för årskurs 9 under de senaste åren. I tabellen nedan redovisas andelen elever som inte nått målen (EUM) för årskurs 9.

Tabell 1. Andel elever i procent som ej uppnått målen (EUM) för årskurs 9 på det nationella ämnesprovet i matematik. Källa: Skolverket.

| År      | 1999 | 2000 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 |
|---------|------|------|------|------|------|------|------|
| EUM (%) | 12   | 16   | 13   | 14   | 10*  | 13   | 13   |

\* Provet spreds på Internet kort före provdatum och bortfallet är extremt stort varför denna uppgift ska tolkas med stor försiktighet.

Eftersom uppgifterna på ämnesprovet skiljer sig från år till år så kan man inte uttala sig om huruvida eleverna blivit "sämre" eller "bättre". Bortfallet är också relativt stort. 2005 deltog endast 88 procent av eleverna i hela provet. Detta trots att provet är obligatoriskt.

Det är stora skillnader mellan svenska elever och elever med utländsk bakgrund. År 2004 var det drygt 11 procent av de svenska eleverna som inte uppnådde målen i matematik. Det var nästan dubbelt så stor andel, drygt 21 procent, av eleverna med utländsk bakgrund som inte uppnådde målen i matematik. Tittar man på enskilda skolor så framträder en tydlig bild av en segregerad svensk skola. I några av Malmös invandrartäta skolor var det nästan hälften av eleverna som inte fick godkänt i matematik när de slutade årskurs nio. De skolor som lyckades bäst hade inga eller några procent av eleverna som inte fick godkänt. Bilden av en likvärdig skola krackelerar på ett högst oroväckande sätt.

### ATT KUNNA ELLER INTE KUNNA ...

Vi kommer att behandla elever med låga prestationer, eller särskilda utbildningsbehov i matematik (SUM), i denna framställning. Det rör sig om elever som skolan bedömt inte kunna matematik. Praktiskt handlar det om elever som inte uppnått betyget godkänd. I EU används uttrycket *Special Educational Needs* efter förslag 1978 i den engelska Warnock-rapporten. Den undervisning som skolan anordnar för SUM-elever blir alltså SUM-undervisning.

### ... BEROR PÅ LÄROPLANEN OCH BETYGSSYSTEMET

Det finns många som menar att det nya kursplane- och betygssystemet bara har synliggjort problem som alltid har funnits. Resultatet skulle alltså bestämmas i stor utsträckning av hur politikerna och deras sakkunniga utformat läroplanen och kursplan med dess mål att uppnå samt på betygssättningen i grundskolan. Vi får definitionen: Att inte uppnå läroplanens utbildningsmål eller, uttryckt på annat sätt, att inte få betyget godkänd i matematik är Särskilt utbildningsbehov i matematik (SUM). Operationellt kalkylerades i Medelsta-studien med att omkring 15 procent är SUM-elever. Omfattningen går tillbaka på Magnes undersökningar från 1950-talet.

Av det sagda inser läsaren att vi betraktar att kunna eller inte kunna matematik som en skolpolitisk-didaktisk bedömning. Det innebär att vi i skolan bedömer elevernas prestationer efter de bestämmelser om mål att sträva mot eller mål att uppnå för eleverna som finns i läroplanen och kursplanen.

Den som inte har börjat eller som avslutat skolgången bedöms enligt andra krav. Vi kan då beteckna prestationerna som SAM, det vill säga särskilda arbets- (privata) behov i matematik. Andra operationella kategoriseringar som förekommer i litteraturen är exempelvis en medicinsk bedömning och en socialt värderad bedömning.

## 1.3 TIDIGARE FORSKNING OM DE

### LÄGST PRESTERANDES MATEMATIKKUNSKAPER

Vad kan SUM-eleverna i matematik? Magnes första mera omfattande undersökning om lågpresterande elever i matematik har kallats 1955 års Göteborgsundersökning. Den publicerades i olika omgångar (till exempel Magne 1958, 1960). En följande omfattande undersökning

om matematikkliniker kallas ibland "Karlskrona-undersökningen" (se Magne 1973).

Magne har senare publicerat två stora projekt angående långtidsutvecklingen om kunskaperna i matematik. Den ena gjordes i Medelby (1990a), omfattande två delundersökningar. Den första undersökningen i Medelby genomfördes 1955 och då gällde 1919 års "undervisningsplan". En andra undersökning skedde år 1984 och vid den tidpunkten gällde Lgr 80. Åttaåringarna i Medelby fick samma uppgifter år 1955 och 1984, efter det att de fått ett års undervisning i folkskola, respektive grundskola. Trots de mycket stora skillnaderna i läroplanerna visade sig olikheterna i kunskaperna år 1955 och 1984 vara obetydliga. Slutsatserna var att

- effekten av de berörda läroplanerna var ringa, samt
- elevernas matematikprestationer var i stort sett jämförbara 1955 och 1984.

Varken uppgång eller nedgång kunde noteras. Vi återkommer senare med en undersökning av hypotesen att elevernas prestationer är rätt stabila över tid med hjälp av Medelsta-materialet.

Om Medelsta har Magne dels ensam (1998, 1990b), dels senare tillsammans med Kerstin Thörn (Magne & Thörn 1987ab), dels med Hannele Ikäheimo (Ikäheimo 1989, 1991) samt med Arne Engström (Engström & Magne 2003) publicerat ett antal rapporter. Engström analyserade olika aspekter på Medelsta-undersökningarna (1991). Erfarenheterna från Medelby-projektet togs till vara. I Medelsta gjordes tre totalinventeringar av matematikprestationerna för samtliga grundskoleelever i årskurserna 1–9.

Om svaga prestationer i matematik är litteraturen omfattande. Det är stora svårigheter förbundna med själva studiet av kunskaperna, främst på grund av studiernas målsättning. Medicinsk forskning intresserar sig mest för afasifenomen. Pedagogisk forskning inriktar sig på ofta på felstudier. I båda fallen knyts förklaringsmodeller mera till individen än sociala samhällsfaktorer och undervisningsfaktorer. Studiet har blivit ensidigt genom att forskarna huvudsakligen uppmärksammat enskilda individers räknefärdighet. Föreliggande arbete söker fylla en lucka i litteraturen genom att översiktligt analysera elevernas lösningar av de 541 uppgifterna i Medelsta-diagnoserna.

Vi kan också hänvisa till följande aktuella böcker av handboksprägel om elevbesvär med matematikberäkningar av Ahmed, Wickman och Williams (2002), Engström (2003), Lorenz och Radatz (1993),

Lunde, Hole och Hansen (1999), Lunde (2001, 2002), Magne (1998, 2003), Scherer (2002, 2003).

Pionjären i fråga om studiet av räknefel är ungraren Paul Ranschburg (1905) som i en lång rad av skrifter från och med 1905 behandlade frågan om skillnaden mellan räkneprestationer av genomsnittsbarn och efterblivna barn. Bland andra tidiga studier finns insatser av amerikanerna Scott (1916) och Staker (1917) som konstruerade de tidigaste standardiserade aritmetiktesten. Flera ansatser kan noteras. De tidiga testförsöken var alla grupprovet och utgick från associationsteorier (behaviorism) varigenom elevers mekaniska räknefärdighet blev föremålet för mätning. Clara Schmitt (1921) var först med att konstatera så kallad specifik räknesvårighet hos skolelever (alltså låg räknefärdighet utan nedsatt inlärningsförmåga). Stilbildande testprodukter är amerikanska Compass Diagnostic Tests in Arithmetic av grupptestkaraktär med standardiserade resultattabeller, som första gången gavs ut 1925, och likaså Schonells engelska grupprovet Diagnostic Tests (1937). I Sverige utkom på 1930-talet Wigforss Rostad-prov och 1972 Magnes matematikprov. 1977 offentliggjordes för första gången Magnes Medelsta-diagnoser.

En helt åtskild ansats representeras av det 1926 publicerade amerikanska Buswell och John's individualmetod, kallad Diagnostic Studies in Arithmetic. I England utkom Vernons individualprov i matematik 1949. Det väsentliga momentet i dessa test är kravet att eleven ska beskriva sitt beteende samtidigt som beräkningen utförs.

I Tyskland har nyligen de så kallade DEMAT (Deutsche Mathematiktests) och HRT (Der Heidelberger Rechentest) publicerats. I Schweiz finns bland annat ZAREKI (von Aster 2001). Se Hasselhorn, Marx och Schneider (2005) för en översikt av tyskspråkiga tester. I Storbritannien finns så kallade dyskalkylitesterna (se bland annat Butterworth 2003, Butterworth & Yeo 2004).

Vid sidan av dessa exempel på vetenskapligt utformade testförfaranden finns både officiellt och privat utförda så kallade diagnoser av skilda slag, bland andra anslutna till examensprövning och läromedelsuppföljning.

Tendensen i forskningen torde vara att avråda från standardiserade testprocedurer. Diagnosteorin brukar numera betona önskvärdheten av att använda dynamiska diagnosmetoder (Lunde 2005), därmed åsyftande att läraren bör ta hänsyn till ett stort antal verk samma faktorer i kunskapsbildningen. Forskningen härom befinner sig dock ännu i sin linda.

Det är väl bestyrkt att elever med olika neurologiska skador och andra funktionsstörningar företer lägre prestationer i matematiktest än elever utan sådana konstaterade funktionsstörningar. Vi vill ge exempel på undersökningar om sådana differenser.

Bäst belysta är matematikprestationerna hos begåvnings- och inlärningsstörda skolelever. Redan i Ranschburgs tidigaste testningar visade utvecklingshämmande elever lägre testresultat än övriga. Differensen mellan elever i hjälpklass och normalklass har bedömts till minst tre läsår (Landin 1950). 12 år gamla elever i särskola bedömdes ha matematikkunskaper som svarade mot en genomsnittlig skolnybörjare (7 år) enligt studier av bland andra Johansson och Vemmenby (1967, se Magne 1973). Detta motsvarar en matematikretardation på fem år. Man har också framfört teorier för att förklara dessa förhållande. Redan vid mitten av 1900-talet tolkade Cruickshank (1948) detta sålunda:

- dessa elever har svag abstraktionsförmåga,
- de har torftigt språk,
- de har svårt att finna samband mellan föreställningar och symboler,
- de har inte lärt sig praktisk tillämpning,
- de har omogna arbetsvanor.

Elever med funktionshinder eller organiska skador/hinder är ett otillräckligt studerat område. Neurologiskt handikappade har bland annat studerats av Malmqvist (2001) och enligt honom är elever med rörelsehinder sena i sin matematiska kunskapsutveckling.

Hörselskadade elever är sparsamt studerade. Foisack (2003) och Frostad (1998) visar sammanställningar av testresultat där man ofta hävdar att döva och hörselskadade kan vara försenade omkring tre läsår.

Ahlberg (1994, 2000), Ahlberg och Csocsán (1994), Ostad (1986ab, 1989) och andra har publicerat sammanfattningar där blinda och gravt synskadade angetts uppnå i stort sett 15–17 procent lägre än normalt seendes matematikresultat i test.

Affektiva och sociala störningar är andra bristbranscher (Magne 1998). Emellertid är det otillräcklig kunskap också om de lägst presterande eleverna i vanliga skolsystem.

## 1.4 RAPPORTENS UPPLÄGGNING

I det inledande kapitlet ges en introduktion till rapportens tema: de lägst presterandes, eller SUM-elevernars, matematikkunskaper. I det andra kapitlet ges en sammanfattning av Medelsta-studiens andra del samt en fördjupad studie av de femton procent lägst presterande eleverna i Medelsta. Vi kan konstatera att redan tidigt kan stora skillnader mellan SUM-eleverna och de genomsnittliga prestationerna observeras. Skillnader som ökar under grundskoleåldern. I kapitel tre studeras skillnaden mellan elever med relativt sett höga och SUM-elever med speciellt låga prestationer. I kapitel fyra redovisas en kvalitativ analys av SUM-elevernars matematikkunskaper. I kapitel fem diskuteras vardagsmatematikens betydelse för SUM-eleverna. I det sjätte skissas några drag i en förändrad matematikundervisning. Avslutande kommentarer ges i rapportens sista kapitel.



## KAPITEL 2

### ÅTER TILL MEDELSTA

## 2.1 MEDELSTA-UNDERSÖKNINGEN

Vi har alltså studerat matematikkunskaperna hos alla grundskolelever i Medelsta, en genomsnittlig svensk kommun, vid tre olika tillfällen: år 1977, 1986 och 2002. Magne ledde de första två undersökningarna. 2002 års undersökning utfördes av Magne och Engström. Tre mycket olika läroplaner var i kraft: Lgr 69, Lgr 80 respektive Lpo 94.

Elevernas kunskaper prövades i samtliga tre olika undersökningar med ett och samma instrument, de 11 Medelsta-diagnoserna. Diagnoserna togs fram i samarbete med lärare i kommunen. Lärarna framställde önskemålet att uppgifterna skulle svara mot de kunskaper som lärarna själva värderade som särskilt viktiga. Testningsplanen illustreras med hjälp av tabell 2.1. Tabellen visar att antalet uppgifter varierar beroende på årskurs, från 59 uppgifter i årskurs 1 till 88 i årskurserna 7–9. Varje elev testades med 2–4 diagnoser och varje testningstillfälle omfattade bara en av diagnoserna. Testningarna ägde rum under en begränsad period under vårterminen omkring 1 mars. Avsikten var att de skulle täcka de elementära delarna av lärokursen i grundskolan.

Tabell 2.1 Testningsplanen för Medelsta-projektet.

| Åk | Diagnos |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |
|----|---------|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|
|    | 1       | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 1  | x       | x |   |   |   |   |   |   |   |    |    |
| 2  |         |   | x | x | x |   |   |   |   |    |    |
| 3  |         |   |   |   | x | x | x |   |   |    |    |
| 4  |         |   |   |   |   | x | x | x |   |    |    |
| 5  |         |   |   |   |   |   | x | x | x |    |    |
| 6  |         |   |   |   |   |   |   | x | x | x  |    |
| 7  |         |   |   |   |   |   |   | x | x | x  | x  |
| 8  |         |   |   |   |   |   |   | x | x | x  | x  |
| 9  |         |   |   |   |   |   |   | x | x | x  | x  |

För en redogörelse av uppgiftsanalyser, reliabilitet, validitet, bortfall med mera hänvisas till kapitel fyra, Medelsta-projektets metod, i Engström och Magne (2003).

Varje uppgift analyserades utifrån tre utgångspunkter: (1) Årskurstillhörighet, (2) Stoffområden samt (3) Behållningskriterium.

(1) Dels klassificerades uppgiftens årskurstillhörighet, det vill säga det kursmoment som respektive uppgift bedömdes tillhöra i den årskurs där undervisningen rimligen syntes böra starta.

(2) Dels klassificerades innehållet enligt stoffområdena i kursplanen i respektive läroplan. Dessa formulerades av Magne och Thörn (1987) som en taxonomi för den elementära matematikundervisningen. I elementarundervisningen betraktas ofta de grundläggande matematiska delområdena vara aritmetik, främst taluppfattning eller talsinne, och geometri, formuppfattning och formsinne jämte mätningar, som föreslagits av den norska matematikdidaktikern Ingvill Stedøy (2005). För vår del utpekar vi dessutom problemlösning med matematisk språkuppfattning (matematiskt sinne) som ett grundläggande kunskapsområde.

Vi utgick från en ytterligare utvidgad uppdelning av stoffet med följande sex huvudområden enligt Magne och Thörn. Studerar vi brister som finns hos SUM-elevgruppen inom de fem huvudområdena, som medtas i undersökningarna, så framkommer följande:

- 1) Taluppfattning (T) har acceptabla lösningsfrekvenser så länge det handlar om naturliga tal. Bristerna finns ännu i årskurs 9, men framför allt för rationella tal (bråk och procent). SUM-eleverna presterar ungefär samma resultat såväl i de tidigare som i de senare undersökningsåren.
- 2) Problemlösning och språkuppfattning (P) uppvisar genomgående rätt låga lösningsfrekvenser och i stort sett lika alla åren.
- 3) Geometri och mätningar (G) uppvisar jämförbara brister hela tiden.
- 4) Räkning med de fyra räknesätten (ASMD) klarar eleverna utomordentligt dåligt alla åren, så länge de måste använda traditionella uppställningar. De flesta lärare undvek att låta eleverna använda miniräknare under testningarna.
- 5) Algebraiska problem (F) visar låga genomsnittsvärden.
- 6) Sannolikhetslära och statistik (var ej representerat).

(3) Dels användes begreppet behållningskriterium. Inom forskningen om inlärnin brukar man använda sig av kriterier för behållningen av lärostoffet i undervisningen. Vi anger kriteriet för elevernas uppgiftslösningar i procent. Således betyder 100 procent lösningsfrekvens att alla elever löst en uppgift korrekt. 80 procent betyder att 8 av 10 elever utfört godtagbara lösningar av uppgiften.

Skolans undervisning bör åsyfta en så hög behållning som möjligt. I vår design har vi betraktat olika komplexitetsnivåer och skilt mellan å ena sidan enkla uppgifter och andra sidan sammansatta uppgifter. Särskilt i enkla uppgifter, till exempel addition av ensiffriga tal, är det dessutom av praktisk betydelse att eleverna når ett högt behållningskriterium. I komplexa uppgifter kan ett vida lägre kriterium accepteras. Som enkla betraktar vi uppgifter som representerar endast en operation inom ett av de angivna huvudområdena (till exempel:  $5 - 3 = 2$ ; 1 meter = 100 centimeter; "Hur många kronor får Per, om han får två kronor av mamma och tre kronor av pappa"). Eftersom uppgifterna i Medelsta-diagnoserna befinner sig på en elementär nivå har vi ansett de hårda behållningskriterierna vara önskvärda. Kriteriet på behållning av enkla uppgifter finner vi kunna bestämmas till 90-procentig lösningsfrekvens. För sammansatta uppgifter på Medelsta-nivån har vi betraktat kriteriet 80 procent som en kanske acceptabel kunskap. SUM-eleverna når mycket sällan så höga behållningsnivåer.

Vi kommer att nedan behandla några aspekter redovisade i 2003 års rapport. För en utförligare redovisning av undersökningen hänvisas till Engström och Magne (2003).

## 2.2 HUR PÅVERKAR LÄROPLANEN

### KUNSKAPSUTVECKLINGEN FÖR MEDELSTA-ELEVERNA?

Huvudmålet för de tre Medelsta-undersökningarna var att följa kunskapsutvecklingen i matematik, dels från årskurs till årskurs, dels över tid från år 1977 till år 2002.

Vi undersökte hur eleverna i olika årskurser löste en given mängd uppgifter vilka alla refererar till kursplanemålen. Först finner vi att elevernas kunskapstillskott ökar för varje år, men – för det andra – att ökningen blir mindre och mindre under de senare åren i grundskolan. Jämfört med den 6- à 7-åriga folkskolan så innebär skoltidsförlängningen genom den nioåriga grundskolans tillkomst att utbildningen som helhet ger ett kunskapstillskott. Grundskoleeleverna läser nämligen matematik två à tre år längre än vad folkskoleeleverna gjorde med sin sex- à sjuåriga obligatoriska skolgång.

Eftersom Sverige nu har en nioårig skola är skolgången två à tre år längre än då landet hade folkskola. Ännu i början av 1950-talet var en väsentlig andel av det obligatoriska skolväsendet sjuårig. Vi tycker oss finna att matematikprestationerna ökar i och med att skolplikten blivit nioårig. Kanske har vi anledning att ställa tesen att grundskolans sextonåringar vid avslutad skolgång kan mer matematik än en sextonåring i det äldre skolsystemet.

Lägger man därtill reflektionen att den svenska ungdomen sedan något decennium uppmanas att fullfölja med studier i gymnasieskolan, och i stor utsträckning gör det, uppstår nya tillskott genom den utökade matematikinläringen. Visst riktas hård kritik mot gymnasieungdomarnas kunskaper i matematik, vilken kan vara berättigad, men det måste tillstås att dessa ungdomar använder rätt lång studietid åt matematikkurser i varierande program. Vi är samtidigt medvetna att kulturskribenter redan på 1940-talet framförde hård kritik mot det äldre skolsystemets effektivitet, grundat på att värnpliktiga rekryter uppvisade mycket svaga färdigheter och skolkunskaper.

Ett andra mål var att se om den allmänna kunskapsutvecklingen var likartad genom åren. Snabba eller häftiga förändringar är osannolika. Vår hypotes var att utbildningen mycket långsamt påverkar elevbeteendet, så också i matematik. Eleverna antogs alltså prestera ungefär likartade testpoäng som 1977, 1986 och 2002.

Vår tolkning är att Medelsta-elevernars kunskapsutveckling överensstämmer med den ställda hypotesen. Det är frapperande likheter i fråga om elevernas matematiska prestationsnivå för de tre undersökningsåren. Detta trots de stora skillnader som finns mellan de olika läroplanerna (för en diskussion om skillnaderna i utgångspunkt och innehåll i de olika läroplanerna se kapitel 3 i Engström och Magne 2003). Vilken roll spelar då en förändrad läroplan för matematikundervisningens utformning och elevernas kunskaper? Vår slutsats kan inte bli annat än att den spelar en högst försumbar roll.

Hypotetiskt finner vi också att skolutvecklingen kan gynna matematikprestationerna i grundskolan. Jämförelsen mellan resultaten i årskurs 1 pekar på en sannolikhet för ökning år 2002 i förhållande till resultaten i de tidigare undersökningarna 1977 och 1986. En möjlig förklaring är att förskolan börjat uppmärksamma matematiken vilket påverkat elevernas kunskapsunderlag. Liknande erfarenheter finns från USA, där man genom Head Start-programmen i förskolan påtagligt ökat framför allt de socialt eftersatta barnens förkunskaper i matematik. Doverborg och Pramling Samuelsson (1999) har i en utredning om saken fört fram liknande tankar. Det talar för en fortsatt och förstärkt satsning på matematik i förskoleåldern. Nyligen avslutade längdsnittstudier i Tyskland tyder på att en medveten och strukturerad satsning på matematik för yngre barn kan förhindra att de senare utvecklar matematiksvårigheter (se bland andra von Aster och Lorenz 2005, Hasselhorn, Marx och Schneider 2005).

Således förmodar vi att undervisningsforskningen överskattar effekten av läroplanernas styrning och starkt undervärderar den styrning som sker i form av samspel mellan skolorganisatoriska krafter

och sociala, etniska och ekologiska påverkningar. Detta samspel, kanske manifesterat i direkt eller indirekt utbyte av matematikhandlingar mellan vardagslivet och skolsystemet sker i hög grad som en utomskolverksamhet.

## 2.3 SUM-ELEVERNA I MEDELSTA

De 15 procent lägst presterande eleverna (SUM-eleverna) studerades särskilt i Medelsta. Först en kort sammanfattning av några resultat. Ett av de märkligaste resultaten i alla tre Medelsta-undersökningarna är, att SUM-eleverna tillägnar sig betydligt mer matematik under de första fyra åren än under alla återstående fem läsår.

Också SUM-eleverna visade ett klart nytillskott av kunskaper för varje läsår som de gick i grundskolan. Men tillskottet förvärvades mycket långsammare och var mycket lägre än för de övriga eleverna. När de hunnit till årskurs 9, så svarade matematikprestationerna mot vad vanliga elever klarade i årskurs 4. De hade sedan länge blivit utslagna från skolans matematikundervisning.

Det finns varken ökning eller minskning av frekvensen SUM inom ramen från 1977 till 2002 enligt de tre Medelsta-undersökningarna.

Vem bär ansvaret för misslyckandena? Det vet vi inte. Många anser att det är eleven det beror på. Men visst beror det till någon del på matematikens abstrakta natur? Beror något på läroplanen? Undervisningsmetoden? Eller på lärarna? Kanske på oss andra, omgivningen och familjen? Kanske på själva skolsystemet? Då vi talar om sådana yttre faktorer används termen didaktogena faktorer.

”Matematiksvårigheter” kan fattas på flera olika sätt, dels som ett individuellt beteendeproblem att inte kunna matematik, dels som en kollektiv kunskapsbrist i jämförelse mellan grupper av individer eller mellan tidpunkter. I första fallet rör det sig om individuella olikheter av biologisk natur där eleverna varierar från höga till låga prestationer. I andra fallet är det fråga om en allmän kunskapsnivå bibehålls, höjs eller sänks för skolväsendet i dess helhet eller för delar av skolväsendet.

Vi betonade i Engström och Magne (2003) att jämförande skolundersökningar är svåra att genomföra och rätt otillförlitliga. På grund av reliabilitets- och validitetsbrister kan man sällan påvisa effektskillnader mellan skolorganisatoriska betingelser. Ett exempel: 1950-talets undersökningar av skillnader mellan traditionell och modern matematik (som i IMU-projektet).

I tabell 2.2 visar Medelsta-diagnosernas medelvärden för 2002, 1986 samt 1977 i nämnd ordning för de olika diagnoserna och årskurserna.

Tabell 2.2. Översikt över Medelsta-diagnosernas medelvärden 2002, 1986 samt 1977.

| Diagnos | Åk 1                 | Åk 2                 | Åk 3                 | Åk 4                 | Åk 5                 | Åk 6                 | Åk 7                 | Åk 8                 | Åk 9                 |
|---------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 1       | 28,3<br>28,1<br>27,1 |                      |                      |                      |                      |                      |                      |                      |                      |
| 2       | 20,0<br>20,0<br>19,0 |                      |                      |                      |                      |                      |                      |                      |                      |
| 3       |                      | 25,6<br>25,2<br>24,5 |                      |                      |                      |                      |                      |                      |                      |
| 4       |                      | 23,4<br>23,4<br>24,2 |                      |                      |                      |                      |                      |                      |                      |
| 5       |                      | 16,3<br>16,4<br>16,5 | 18,8<br>18,7<br>18,8 |                      |                      |                      |                      |                      |                      |
| 6       |                      |                      | 18,6<br>21,3<br>21,0 | 22,9<br>23,1<br>23,1 |                      |                      |                      |                      |                      |
| 7       |                      |                      | 14,6<br>16,6         | 22,3<br>20,9<br>20,4 | 23,6<br>23,3<br>20,0 |                      |                      |                      |                      |
| 8       |                      |                      |                      | 10,6<br>11,6<br>13,4 | 13,7<br>14,2<br>15,6 | 14,8<br>14,9<br>17,0 | 14,4<br>15,4<br>16,4 | 15,1<br>15,7<br>16,0 | 14,7<br>15,9<br>15,0 |
| 9       |                      |                      |                      |                      | 15,4<br>15,1<br>17,0 | 16,3<br>17,1<br>18,4 | 16,7<br>18,0<br>18,4 | 17,7<br>18,1<br>19,0 | 17,5<br>18,4<br>19,5 |
| 10      |                      |                      |                      |                      |                      | 12,2<br>12,5<br>14,8 | 12,8<br>14,2<br>14,2 | 13,6<br>15,5<br>14,8 | 14,0<br>14,8<br>15,8 |
| 11      |                      |                      |                      |                      |                      |                      | 12,1<br>14,3<br>15,9 | 13,4<br>16,8<br>15,5 | 14,0<br>16,8<br>17,1 |

Den valda designen i Medelsta-studien möjliggör att vi kan studera ett flertal aspekter av matematikundervisningen. Användningen av samma diagnos i flera årskurser möjliggör att vi kan följa elevernas färdighetsutveckling från årskurs till årskurs på itemnivå för hela och

delar av elevgruppen för de tre undersökningsåren. Vi presenterade resultaten av en sådan studie i 2003 års Medelsta-rapport. Här följer nu en fördjupad redogörelse för en av diagnoserna.

## 2.4 DET SPECIELLA FALLET MED DIAGNOS 8

Låt oss välja diagnos 8 för att illustrera färdighetsutvecklingen med hjälp av diagnoserna eftersom den följer eleverna i så många som sex årskurser – från och med fyran till och med nian. I tabell 2.3 redovisas lösningsfrekvenserna för diagnos 8 för olika årskurser under de tre undersökningsåren.

Tabell 2.3. Lösningsfrekvenserna för uppgifterna i diagnos 8.

| Item | Årskurs |      |      |      |      |      |      |      |      |
|------|---------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|      | 4       |      |      | 5    |      |      | 6    |      |      |
|      | 2002    | 1986 | 1977 | 2002 | 1986 | 1977 | 2002 | 1986 | 1977 |
| A    | 74      | 77   | 77   | 87   | 85   | 77   | 90   | 86   | 87   |
| B    | 71      | 82   | 85   | 90   | 89   | 76   | 92   | 95   | 89   |
| C    | 57      | 78   | 87   | 81   | 82   | 74   | 92   | 85   | 89   |
| D    | 54      | 65   | 60   | 61   | 76   | 77   | 75   | 77   | 79   |
| E    | 59      | 66   | 69   | 66   | 78   | 79   | 71   | 75   | 83   |
| F    | 53      | 66   | 56   | 73   | 73   | 80   | 75   | 78   | 87   |
| G    | 86      | 91   | (22) | 92   | 94   | (80) | 96   | 96   | (80) |
| H    | 25      | 38   | (81) | 37   | 49   | (89) | 54   | 53   | (96) |
| I    | 49      | 56   | (57) | 66   | 70   | (56) | 74   | 89   | (73) |
| J    | 79      | 76   | 76   | 83   | 91   | 72   | 87   | 89   | 73   |
| K    | 58      | 67   | 69   | 66   | 72   | 84   | 71   | 77   | 85   |
| L    | 77      | 80   | 85   | 90   | 89   | 93   | 87   | 92   | 91   |
| M    | 69      | 71   | 70   | 79   | 82   | 77   | 80   | 86   | 85   |
| N    | 16      | 21   | 54   | 83   | 73   | 73   | 86   | 83   | 88   |
| O    | 51      | 40   | 58   | 85   | 83   | 74   | 91   | 90   | 91   |
| P    | 69      | 69   | 72   | 82   | 81   | 77   | 88   | 86   | 88   |
| Q    | 63      | 67   | 61   | 77   | 78   | 79   | 87   | 97   | 90   |
| R    | 53      | 55   | 48   | 72   | 78   | 76   | 78   | 83   | 85   |

Tabell 2.3, forts. Lösningfrekvenserna för uppgifterna i diagnos 8.

| Item | Årskurs |      |      |      |      |      |      |      |      |
|------|---------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|      | 7       |      |      | 8    |      |      | 9    |      |      |
|      | 2002    | 1986 | 1977 | 2002 | 1986 | 1977 | 2002 | 1986 | 1977 |
| A    | 93      | 92   | 87   | 93   | 94   | 87   | 94   | 93   | 88   |
| B    | 94      | 98   | 97   | 94   | 98   | 97   | 99   | 97   | 97   |
| C    | 90      | 91   | 90   | 94   | 94   | 89   | 92   | 95   | 87   |
| D    | 64      | 81   | 77   | 81   | 83   | 84   | 82   | 89   | 77   |
| E    | 70      | 79   | 79   | 74   | 79   | 81   | 78   | 86   | 83   |
| F    | 84      | 88   | 88   | 87   | 94   | 74   | 78   | 95   | 78   |
| G    | 94      | 98   | (70) | 98   | 99   | (86) | 96   | 99   | (73) |
| H    | 44      | 50   | (98) | 51   | 54   | (96) | 44   | 59   | (98) |
| I    | 80      | 69   | (63) | 75   | 73   | (66) | 71   | 74   | (72) |
| J    | 89      | 90   | 74   | 93   | 92   | 69   | 90   | 90   | 77   |
| K    | 70      | 81   | 81   | 66   | 80   | 84   | 79   | 86   | 87   |
| L    | 88      | 90   | 86   | 86   | 93   | 90   | 85   | 94   | 95   |
| M    | 69      | 89   | 81   | 77   | 83   | 81   | 77   | 87   | 80   |
| N    | 83      | 88   | 87   | 92   | 91   | 84   | 88   | 90   | 87   |
| O    | 90      | 90   | 85   | 93   | 95   | 95   | 91   | 94   | 91   |
| P    | 83      | 86   | 85   | 89   | 87   | 79   | 81   | 89   | 92   |
| Q    | 79      | 89   | 83   | 83   | 87   | 79   | 75   | 90   | 88   |
| R    | 75      | 83   | 78   | 79   | 88   | 75   | 70   | 83   | 75   |

Anm. Parentes betyder att uppgiften är ändrad till nästa undersökning av praktiska skäl.

Figur 2.1 på nästa uppslag visar de uppgifter som ingår i diagnos 8.

Magnes

Matematikdiagnoser 8 A

Poäng.....

Namn.....Klass.....Datum.....

Skola.....Klassföreståndare.....

Hjälpmedel: blyertspena, radergummi, millimetergraderad linjal, ev. miniräknare

SKRIV MED SIFFROR

TIO TUSEN FYRA .....

TJUGOFEMTUSEN .....

EN MILJON .....

ADDITION

①  $596 + 8 + 1939 + 87 + 36010$

RÄKNA HÄR

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

⑤  $70668 + 9 + 69568 + 867$

RÄKNA HÄR

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Rita en sträcka som är 7,8 cm lång. Använd linjal.

⑥

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

⑦ 1 TIMME 3 MINUTER ÄR.....MINUTER

⑧ TIO KRONOR TIO ÖRE ÄR.....ÖRE

⑨ ETT KILOGRAM ÄR.....HEKTOGRAM

⑩ FEM CENTIMETER ÄR.....MILLIMETER

Figur 2.1. Uppgifter ingående i diagnos 8.

Magnes

Matematikdiagnoser 8 B

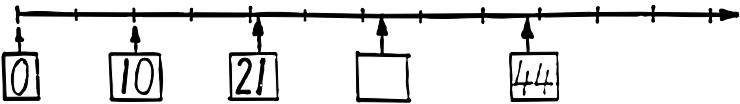
Poäng.....

Namn.....Klass.....Datum.....

Skola.....Klassföreståndare.....

Hjälpmedel: blyertspenna, radergummi, ev. miniräknare

Ⓚ SKRIV TAL SOM PASSAR I DEN TOMMA RUTAN



SUBTRAKTION

Ⓛ 6001-5061

RÄKNA HÄR:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Ⓜ 70104-9049

RÄKNA HÄR:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

MULTIPLIKATION

Ⓝ 100 · 304 = \_\_\_\_\_

Ⓞ 60 · 100 = \_\_\_\_\_

Ⓟ 6 · 149

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Ⓠ 9 · 708

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Ⓡ 8 · 1076

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Figur 2.1 forts. Uppgifter ingående i diagnos 8.

Som synes innehåller diagnos 8 många sådana uppgifter som svarar mot de mest elementära basfärdigheterna i taluppfattning (det vill säga huvudsakligen uppgifter om naturliga tal), geometri och mätning samt räknesätten.

Taluppfattningen förutsättes sträcka sig till fem- à sexsiffriga tal (se uppgifterna A–E och M). I uppgiften F finns tal i decimalform.

Ett syfte med diagnos 8 är att finna hur eleverna i årskurserna 4–9 lyckas med en och samma uppsättning av ytterst elementära uppgifter. Vi uppfattar en räknefärdighet så, att den bör nå ett kriterium på inemot 100-procentig korrekthet. Om missarna blir alltför många besitter eleven en otillräcklig färdighet. Missar en elev halva antalet uträkningar, har den eleven knappast en praktiskt användbar färdighet. Frågan blir då: Hur ser graden av korrekthet ut?

Eleverna antogs ha tillgång till miniräknare och använde i övrigt bara penna, radergummi och millimetergraderad linjal som hjälpmedel. Elever som avstod från miniräknare hade ett rutnät på blanketten där de kunde placera in talen i en konventionell uppställning. Det visade sig emellertid att testningarna kom att utföras helt utan miniräknare men med sedvanliga uppställningar. Det kan för övrigt framhållas att lärarna kom överens om att låta eleverna räkna utan miniräknare. Det är bara någon lärare som rapporterat att enstaka elever sporadiskt fick göra någon uträkning med miniräknare, till exempel på grund av fysiska handkapp.

Man ser att årskurs 4-eleverna till och med i så enkla fall som att skriva talet tjugofem tusen med siffror bara når 75-procentig färdighet. Redan i årskurs 6 är lösningsfrekvensen för denna talskrivning 90-procentig, liksom att ange hur många minuter det går på en timme 3 minuter eller att multiplicera  $60 \cdot 100$  eller  $6 \cdot 149$ . Variationen är obetydlig från år 1977 till år 2002. Lösningsfrekvenserna höjs genomsnittligt för diagnos 8 efter årskurs 4. Årskurs 9 presterar som synes nästan 90 procent på diagnos 8 i uppgifter där årskurs 4 inte ens når två rätt av tre. Genomsnittet för diagnos 8 är således för eleverna i 2002 års undersökning (se tabell 2.4):

Tabell 2.4. Lösningsfrekvenser i procent för diagnos 8 år 2002.

| Årskurs | Lösningsfrekvens i procent |
|---------|----------------------------|
| 4       | 59                         |
| 5       | 76                         |
| 6       | 82                         |
| 7       | 80                         |
| 8       | 84                         |
| 9       | 81                         |

SUM-elevernas behållning jämförd med hela Medelstas elever framgår av att samtidigt studera tabellerna 2.4 och 2.5. Av tabell 2.5 ser man att det är mycket stor skillnad mellan medelvärdena för totala elevgruppen i årskurs och de 15 procent lägst presterande (SUM-eleverna).

Särskilt intressant är diagnos 8, ty med denna kan man pröva hur eleverna räknat i alla årskurserna 4–9. Det gör att vi bland annat kan jämföra prestationerna hos årskurs 9:s SUM-elever i förhållande till hur eleverna i årskurserna 4, 5, 6 och 7 har räknat.

Tabel 2.5. En jämförelse mellan hela årskursen och SUM-eleverna i årskurs 9 år 2002.

| Diagnos | Alla elever | SUM-elever |
|---------|-------------|------------|
| 8       | 81          | 64         |
| 9       | 79          | 59         |
| 10      | 64          | 29         |
| 11      | 54          | 12         |
| 8–11    | 68          | 41         |

Som framgår av tabell 2.5 har SUM-eleverna i årskurs 9 med 64 procent bara obetydligt högre Lösningsfrekvens i diagnos 8 än genomsnittet för hela årskurs 4 enligt tabell 2.4, men ligger klart under genomsnittet 76 procent för årskurs 5. Vad beträffar diagnoserna 9–11, så har nians SUM-elever avsevärt lägre Lösningsfrekvenser än årskurserna 5–7. Den genomsnittliga prestationen för SUM-gruppen i årskurs 9 motsvarar alltså prestationerna för en genomsnittlig elev i årskurs 4. När de lägst presterande eleverna i årskurs 9 får sina slutbetyg, har de för länge sedan slagits ut från skolans matematikundervisning.

## 2.5 SUM-ELEVER OCH ICKE-SUM-ELEVER

Låt oss nu undersöka kunskapsutfallet för den totala populationen än en gång och därefter jämföra med SUM-eleverna. Ett syfte är att använda diagnoserna för att studera hur elever i en lägre klass och en högre klass löste samma uppgifter. Tabell 2.6 visar medelvärden för de diagnoser som användes i fler än en årskurs.

Tabell 2.6. Översikt över medelvärden för gemensamma diagnoser 2002, 1986 samt 1977.

| Diagnos     | År   | Årskurs |      |      |      |      |      |      |      |
|-------------|------|---------|------|------|------|------|------|------|------|
|             |      | 2       | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    |
| 5<br>(22)*  | 2002 | 16,3    | 18,8 |      |      |      |      |      |      |
|             | 1986 | 16,4    | 18,7 |      |      |      |      |      |      |
|             | 1977 | 16,5    | 18,8 |      |      |      |      |      |      |
| 6<br>(27)*  | 2002 |         | 18,6 | 22,9 |      |      |      |      |      |
|             | 1986 |         | 21,3 | 23,1 |      |      |      |      |      |
|             | 1977 |         | 21,0 | 23,1 |      |      |      |      |      |
| 7<br>(27)*  | 2002 |         | 14,6 | 22,3 | 23,6 |      |      |      |      |
|             | 1986 |         | 16,6 | 20,9 | 23,3 |      |      |      |      |
|             | 1977 |         |      | 20,4 | 20,0 |      |      |      |      |
| 8<br>(18)*  | 2002 |         |      | 10,6 | 13,7 | 14,8 | 14,4 | 15,1 | 14,7 |
|             | 1986 |         |      | 11,6 | 14,2 | 14,9 | 15,4 | 15,7 | 15,9 |
|             | 1977 |         |      | 13,4 | 15,6 | 17,0 | 16,4 | 16,0 | 15,0 |
| 9<br>(22)*  | 2002 |         |      |      | 15,4 | 16,3 | 16,7 | 17,7 | 17,5 |
|             | 1986 |         |      |      | 15,1 | 17,1 | 18,0 | 18,1 | 18,4 |
|             | 1977 |         |      |      | 17,0 | 18,4 | 18,4 | 19,0 | 19,5 |
| 10<br>(22)* | 2002 |         |      |      |      | 12,2 | 12,8 | 13,6 | 14,0 |
|             | 1986 |         |      |      |      | 12,5 | 14,2 | 15,5 | 14,8 |
|             | 1977 |         |      |      |      | 14,8 | 14,2 | 14,8 | 15,8 |
| 11<br>(26)* | 2002 |         |      |      |      |      | 12,1 | 13,4 | 14,0 |
|             | 1986 |         |      |      |      |      | 14,3 | 16,8 | 16,8 |
|             | 1977 |         |      |      |      |      | 15,9 | 15,5 | 17,1 |

\* Inom parentes anges antalet item per diagnos.

Årskurs 1 är den enda årskursen som inte kan jämföras med andra årskurser. Alla övriga årskurser hade minst en diagnos gemensam med någon annan årskurs.

Vi kan för alla diagnoser utom nr 1 och nr 2 göra jämförelser mellan åtminstone två årskurser. Om vi väljer 2002 års undersökning framgår det av tabellen att elevernas årskursvisa kunskapsstillskott är betydande under de första årskurserna 2–6. Vi anger detta i standardspridningsenheter s. Således är det från årskurs 2 till 3 ett tillskott på +0,7 s mätt utifrån diagnos 5. Från årskurs 3 till 4 är det ett tillskott i diagnos 6 på +0,3 s och i diagnos 7 på +1,4 s. Från årskurs 4 till årskurs 5 finner vi för diagnos 7 ett tillskott på +0,3 s och för diagnos 8 så mycket som på +0,9 s. Vidare kan sägas att i det följande tillskotten blir allt mindre. Differensen mellan årskurserna 5 och 6 uppgår inte till mer än +0,3 s mätt med diagnos 8 samt bara +0,2 mätt med diagnos 9.

Hur förhåller det sig med SUM-eleverna för året 2002? Låt oss först göra en komplettering med följande data för jämförelse av medelvärdena och standardspridningarna i diagnoserna 1–4:

Tabell 2.7. Jämförelse mellan SUM-elever och hel årskurs.

| Årskurs 1         |      |     |                   |      |     |
|-------------------|------|-----|-------------------|------|-----|
| Diagnos 1         | M    | s   | Diagnos 2         | M    | s   |
| Hela populationen | 28,4 | 5,0 | Hela populationen | 20,0 | 4,4 |
| SUM-eleverna      | 19,6 |     | SUM-eleverna      | 13,4 |     |
| Årskurs 2         |      |     |                   |      |     |
| Diagnos 3         | M    | s   | Diagnos 4         | M    | s   |
| Hela populationen | 25,6 | 1,9 | Hela populationen | 23,4 | 3,4 |
| SUM-eleverna      | 22,7 |     | SUM-eleverna      | 17,3 |     |

Differenserna mellan SUM och icke-Sum-elever i årskurserna 1 och 2 är mycket tydliga. I båda årskurserna uppvisar SUM-eleverna så mycket lägre prestationer än de övriga eleverna att vi får standardspridningsmått på omkring  $-1,5$  à  $-1,8$ . SUM-eleverna har alltså redan på vårterminen i ettan ett underskott som svarar mot en andel av fördelningens yta på endast förväntade cirka 4 á 5 procent. Det är alltså ett mycket svagt resultat av inläringen.

Vi hänvisar också till tabell 2.2 och till tabell 2.8. Förstnämnda tabell visar medelvärdena i samtliga Medelsta-undersökningar från

1977 till 2002. I sistnämnda tabell har vi sammanfört SUM-medelvärdena för år 2002. Man kan läsa ut hur SUM-elevernans matematiska prestationer utvecklar sig årskurs för årskurs från vårterminen i årskurs 1 till och med vårterminen i årskurs 9. I det följande ska vi jämföra SUM-eleverna med eleverna i hela skolväsendet.

Av dessa jämförelser framgår omedelbart att SUM-eleverna erhållit mycket låga testresultat i förhållande till Medelsta-populationen. Vi är medvetna om att vi ställt en delmängd av eleverna (SUM) mot hela elevgruppen. Skulle vi gjort en uppdelning mellan SUM och icke-SUM hade kontrasten framstått korrektare och med den skillnaden att differenserna blivit så mycket större.

Tabell 2.8. Översikt över medelvärden för SUM-eleverna i 2002 års undersökning.

| Diagnos | Medelvärden för SUM-elever i årskurs |      |      |      |      |      |      |      |      |
|---------|--------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|         | 1                                    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    |
| 1       | 19,6                                 |      |      |      |      |      |      |      |      |
| 2       | 13,4                                 |      |      |      |      |      |      |      |      |
| 3       |                                      | 22,7 |      |      |      |      |      |      |      |
| 4       |                                      | 17,3 |      |      |      |      |      |      |      |
| 5       |                                      | 10,1 | 15,0 |      |      |      |      |      |      |
| 6       |                                      |      | 9,3  | 17,3 |      |      |      |      |      |
| 7       |                                      |      | 5,4  | 15,5 | 17,9 |      |      |      |      |
| 8       |                                      |      |      | 5,3  | 8,4  | 11,0 | 10,1 | 11,1 | 11,5 |
| 9       |                                      |      |      |      | 8,1  | 10,1 | 9,6  | 12,6 | 13,9 |
| 10      |                                      |      |      |      |      | 4,5  | 4,1  | 4,4  | 6,3  |
| 11      |                                      |      |      |      |      |      | 2,4  | 2,0  | 3,2  |

Framför allt är det i årskurserna 7–9 som kunskapsskillnaden framstår som iögonenfallande, för att inte säga rent katastrofal. Medan exempelvis SUM år 2002 i årskurs 9 uppnår genomsnittet 3,2 i diagnos 11 presterar icke-SUM medelvärdet 22,4 av 26 möjliga lösningar (hela populationens medelvärde är 14,0).

Vi har redan funnit att SUM-eleverna i årskurs 9 har en medelprestation som ungefärligt motsvarar vad årskurs 4 presterar genomsnitt-

ligt. I tabell 2.9 ger vi ytterligare informationer. Tabellen visar att nionde årskursens SUM-genomsnitt ligger på +0,3 s (standardspridningsenheter) av fyrans och på femmans genomsnitt, då vi gör bedömningen med diagnos 8. Använder vi i stället diagnos 9, får vi underskottet -0,5 s i relation till årskurs 5. Med hjälp av diagnoserna 10 eller 11 blir det -1,2 s jämfört med årskurs 6, respektive -1,5 s i jämförelse med årskurs 7.

Vi kan fortsätta med att studera utfallet av SUM-elevernars prestationer. Vi ser på rutan högst upp till vänster i tabell 2.9. Vi avläser att SUM-eleverna i årskurs 3 har ett medelvärde som med 0,4 standard-spridningsenheter understiger samtliga andra årskursens elevers medelvärde. I årskurs 3 förlägger diagnos 5 SUM-medelvärdet till -0,4 s av elevmedelvärdet i åk 2. Alltså en färdighet som kanske kan jämföras med vad eleverna presterar i slutet av årskurs 1.

Tabell 2.9. Sammanställning för att illustrera differenserna i medelvärden mellan SUM-elever och icke-SUM-elever i 2002 års Medelsta-undersökning.

| Årskurs | Differensens storlek mätt som standardspridningsenhet över, respektive under medelvärdet för den lägre årskursen (s = standardspridningsenhet). |                                                    |                                                    |                                                    |                                                    |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
|         | Diagnos                                                                                                                                         |                                                    |                                                    |                                                    |                                                    |
|         | 5                                                                                                                                               | 6                                                  | 7                                                  | 8                                                  | 9                                                  |
| 3       | -0,4 s lägre SUM-medelvärde än för icke-SUM i åk 2                                                                                              | -1,7 s lägre SUM-medelvärde än för icke-SUM i åk 3 | -1,6 s lägre SUM-medelvärde än för icke-SUM i åk 3 |                                                    |                                                    |
| 4       |                                                                                                                                                 | -0,3 s lägre SUM-medelvärde än för åk 3            | -1,8 s lägre SUM-medelvärde än för icke-SUM i åk 4 | -1,5 s lägre SUM-medelvärde än för icke-SUM i åk 4 |                                                    |
| 5       |                                                                                                                                                 |                                                    | +0,6 högre SUM-medelvärde än för icke-SUM i åk 3   | -0,8 s lägre SUM-medelvärde än för icke-SUM i åk 4 | -2,0 s lägre SUM-medelvärde än för icke-SUM i åk 5 |

Tabell 2.9. Fortsättning från föregående sida.

| Årskurs | Diagnos                                                                                                               |                                                                                                              |                                                    |                                                    |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
|         | 8                                                                                                                     | 9                                                                                                            | 10                                                 | 11                                                 |
| 6       | Ungefär lika med medelvärden för SUM i åk 6 som icke-SUM i åk 4                                                       | –1,2 s lägre SUM-medelvärde än för icke-SUM i åk 5                                                           | –2,0 s lägre SUM-medelvärde än för icke-SUM i åk 6 |                                                    |
| 7       | +0,2 s högre SUM-medelvärde än för icke-SUM i åk 4                                                                    | –1,5 s lägre SUM-medelvärde än för icke-SUM i åk 5                                                           | –1,8 s lägre SUM-medelvärde än för icke-SUM i åk 5 | –1,8 s lägre SUM-medelvärde än för icke-SUM i åk 7 |
| 8       | +0,2 s högre SUM-medelvärde än för icke-SUM i åk 4                                                                    | –1,5 s lägre SUM-medelvärde än för icke-SUM i åk 5                                                           | –1,8 s lägre SUM-medelvärde än för icke-SUM i åk 5 | –1,8 s lägre SUM-medelvärde än för icke-SUM i åk 7 |
| 9       | +0,2 s högre SUM-medelvärde än för icke-SUM i åk 4<br><br>Ungefär lika medelvärden för SUM i åk 9 som icke-SUM i åk 5 | –0,5 s lägre SUM-medelvärde än för icke-SUM i åk 5<br><br>–1,5 s lägre SUM-medelvärde än för icke-SUM i åk 9 | –1,2 s lägre SUM-medelvärde än för icke-SUM i åk 7 | –1,3 s lägre SUM-medelvärde än för icke-SUM i åk 7 |

För årskurs 4 hamnar SUM-medelvärdet på –0,3 s för årskurs 3 enligt diagnos 6. SUM-eleverna tolkas ha en färdighet på en lägre nivå än vårterminen i årskurs 2.

Årskurs 5 kan bedömas med ledning av både diagnos 7 och 8: SUM-eleverna presterar ungefär jämnt med årskurs 3 enligt diagnos 7, men –0,8 s av elevmedelvärdet i årskurs 4 enligt diagnos 8. Prestationen i

diagnos 9 jämfört med icke-SUM-kamraterna i årskurs 5 ligger på  $-2,0$  s. Matematikprestationerna kan bedömas ligga som högst på årskurs 3:s nivå vid mitten av läsåret i årskurs 5.

I årskurs 6 kan jämförelsen med diagnos 8 tolkas som ungefär lika med medelvärdet för årskurs 4 och med diagnos 9 som  $-1,2$  s av årskurs 5:s medelvärde. Således kan färdigheten bedömas som liggande på årskurs 3.

Årskurs 7 uppvisar prestationer som enligt diagnos 8 ligger  $+0,2$  s-enheter högre än för årskurs 4, och enligt diagnoserna 9–11 på nivåer som mycket starkt understiger årsgenomsnittet för årskurserna 5–7.

Årskurs 8 har fortfarande ett överskott i relation till årskurs 4 men underskott i övriga jämförelser med årskurserna 5 och 6.

Inte desto mindre kan Medelstas SUM-elever anses ha ökat sina matematikprestationer under skolgången. Detta framgår av tabell 2.8 som återger medelvärdenas tillväxt under loppet av grundskolan. Vi ser att ökningen från år till år går snabbast i årskurserna 1 till 5 och så småningom går allt långsammare. Den stannar dock inte upp helt och hållet.

Nu är SUM-eleverna långt ifrån någon enhetlig ”grupp” eller ”kategori” av individer. Det första vi måste konstatera är att det är rätt avsevärda individuella skillnader i kunskaper. Några SUM-elever befinner sig nära godkänd-gränsen och kan förväntas utan alltför stora ansträngningar bli godkända efter en förbättrad undervisning. Andra elever saknar i utomordentligt hög grad en beredskap att tillägna sig de många komplexa kursmoment som utgör mål att uppnå för elevernas inlärande. Till detta ska vi återkomma senare.

Sammanfattningsvis gör vi den reflexionen

- att SUM-elevernas matematikkunskaper ökar något från årskurs till årskurs,
- att SUM-eleverna tidigt i grundskolan uppvisar lägre prestationer än genomsnittseleven, och att skillnaderna ökar under grundskoletiden,
- att årskurs 9 har en genomsnittsstandard för SUM-eleverna som är i nivå med vanliga elevers genomsnitt i årskurs 4, eleverna ska då börja i gymnasieskolan,
- att ett mycket stort antal skolorganisatoriska betingelser samverkar till att elever i skolan har bättre eller sämre behållning av matematikundervisningen. Detta betecknar vi som faktorsamspels-modellen.



## KAPITEL 3

EN KONTRASTERANDE STUDIE MELLAN ELEVER  
MED RELATIVT SETT HÖGA OCH **SUM**-ELEVER  
MED SPECIELLT LÅGA PRESTATIONER

### 3.1 FELSTUDIER

Felanalyser kan som redan Ranschburg påpekade vara utgångspunkten för en stödundervisning, upplagd så att eleverna med inlärningsproblem kan få en effektiv hjälp. Undersöker man de registrerade fel som gjorts i Medelsta år 2002 kan man inte påstå att de tusentals felen utförts av de 2 432 eleverna. Det är i toppskiktet få eller inga fel. I bottenkiktet samlas merparten av de producerade felen. Vi kan finna av tabell 3.1 att de drygt ett tusen eleverna över medianen har till och med färre fel än de cirka 300 SUM-eleverna. En tredjedel av eleverna gör över två tredjedelar av felen. Således är det förhållandevis få elever som gör många fellösningar.

En felstudie med inriktning på att studera kontrasterna mellan ytterlighetsgrupper av elever kan visa på utvägar att planera undervisningen för eleverna med låga prestationer. Till att börja med är fördelningarna av elevernas lösningar eller lösningsförsök i tabell 3.1 tankeväckande. Vi kan först se på eleverna över medianen (Ö-eleverna). De har lösningsfrekvenser på över 90 procent i över hälften av uppgifterna, i årskurserna 1–5 långt över hälften.

Hos de tidiga årens SUM-elever är det relativt sällsynt med lösningsfrekvenser över 90 procent och ännu lägre är andelen i grundskolans sista år. Så många som inemot var tredje till var annan SUM-elever saknar i stort sett den av kursplanen förutsatta lösningsförmågan för årskurstypiska uppgifter redan under de första åren. Under de sista åren är det som tidigare sagts en närmast katastrofal situation. Det är stark kontrast mellan Ö-eleverna och SUM-eleverna.

Detta omdöme bestyrks ytterligare genom att studera tabell 3.2. Låt oss åter börja med Ö-eleverna. Tabellen redovisar både korrekta och felaktiga lösningar. För Ö-elevernas del är det klart att deras lösningar ligger på eller över behållningskriteriet 80 procent. Årskurserna 1 och 2 når till och med högre än 90-procentskriteriet. SUM-elevernas resultat i årskurserna 1 och 2, och kanske till och med årskurs 5, kan bedömas som förvånansvärt gott, men är ändå otillfredsställande ur praktisk önskvärdhetsaspekt. Att lösa vart annat räkneexempel korrekt är knappast tillräcklig färdighet. SUM-eleverna på högstadiet misslyckas kapitalt. Det är dessa elever som inom kort kommer att hänvisas till gymnasieskolans kursutbud.

I 1977 och 1986 undersökningar var det möjligt att begagna kursplanerna för att bedöma vilka kurselement som lämpligen skulle föras in i respektive årskurser. Således består Medelsta-diagnoserna av uppgiftsserier vilka avspeglade kursplanens mål att uppnå. Vi kunde

lokalisera de moment som rimligen kunde påbörjas i årskurs 1, årskurs 2 etcetera. Således eftersträvade vi att i diagnoserna placera in uppgifter som återspeglade kursplanen. Vi kallade dessa uppgifter årskurstypiska uppgifter.

Det visade sig i våra analyser att kursplaneförfattarna, liksom skolpolitikerna, i hög grad missbedömde elevernas förmåga att tillgodogöra sig de kurselement som regeringen hade satt som studiemål i grundskolan. Det var bara studiemålen för de lägsta årskurserna som eleverna tillgodogjorde sig enligt de givna anvisningarna. Gradvis sjönk behållningskriterierna för de årskurstypiska uppgifterna, hämtade ur Lgr 69 och Lgr 80. Detta framgår också av två översikter tabellerna 3.3 och 3.4 vilka hämtats ur Magne's bok om de första två Medelsta-projekten (Magne 1990b).

Lpo 94 är såtillvida en mindre lyckad läroplan att den är oklar i formuleringar om vilka specifikationer som undervisningen ska följa. Lpo 94 förväntas snart bli utbytt mot en ny. Därtill kommer att den innehåller en förvirrande anvisning om uppdelning på mål att sträva mot och mål att uppnå. Dessa uttryck är till råga på allt oklart definierade.

Tabell 3.1. Fördelning av uppgifternas lösningsfrekvenser i procent för Medelsta-eleverna 2002 över medianen (Ö), respektive SUM-eleverna (S).

| Lösn.<br>frekv.<br>(%) | Årskurs |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|------------------------|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
|                        | 1       |    | 2  |    | 3  |    | 4  |    | 5  |    | 6  |    | 7  |    | 8  |    | 9  |    |
|                        | Ö       | S  | Ö  | S  | Ö  | S  | Ö  | S  | Ö  | S  | Ö  | S  | Ö  | S  | Ö  | S  | Ö  | S  |
| 100                    | 8       | 4  | 9  | 3  | 4  |    | 4  |    | 2  |    | 1  |    |    |    | 5  | 1  | 2  | 1  |
| 95-99                  | 29      | 2  | 47 | 2  | 19 |    | 26 | 1  | 25 |    | 13 | 1  | 18 |    | 25 | 2  | 24 | 1  |
| 90-94                  | 9       | 5  | 16 | 10 | 10 | 3  | 11 | 4  | 14 | 2  | 11 | 2  | 16 | 2  | 9  | 2  | 16 | 2  |
| 80-89                  | 7       | 4  | 2  | 21 | 16 | 3  | 16 | 3  | 16 | 7  | 18 | 1  | 23 | 3  | 19 | 4  | 28 | 2  |
| 70-79                  | 4       | 3  | 4  | 14 | 9  | 7  | 5  | 11 | 7  | 3  | 9  | 5  | 14 | 5  | 15 | 4  | 11 | 3  |
| 60-69                  | 2       | 6  |    | 2  | 11 | 8  | 6  | 13 | 2  | 13 | 6  | 5  | 5  | 5  | 6  | 4  | 2  | 12 |
| 50-59                  | -       | 5  |    | 9  | 1  | 8  | 1  | 9  | 1  | 12 | 2  | 11 | 6  | 6  | 4  | 13 | 2  | 10 |
| 40-49                  | -       | 12 |    | 8  | 4  | 9  | 1  | 13 |    | 7  | 2  | 5  | 3  | 6  | 2  | 6  | -  | 7  |
| 30-39                  |         | 6  |    | 4  | 1  | 5  | 1  | 4  |    | 10 |    | 9  | -  | 7  | 1  | 6  | -  | 9  |
| 20-29                  |         | 6  |    | 2  | 1  | 12 | 1  | 6  |    | 7  |    | 8  | 2  | 6  | 1  | 8  | 1  | 12 |
| 10-19                  |         | 6  |    | 2  |    | 11 |    | 4  |    | 5  |    | 8  | 1  | 30 | 1  | 11 | 1  | 15 |
| 0-9                    |         | -  |    | 1  |    | 10 |    | 4  |    | 1  |    | 7  |    | 18 |    | 27 | 1  | 14 |
| Summa                  | 59      | 59 | 78 | 78 | 76 | 76 | 72 | 72 | 67 | 67 | 62 | 62 | 88 | 88 | 88 | 88 | 88 | 88 |

Teckenförklaring:  
Ö = elevgruppen över medianen  
S = SUM-elevgruppen

Tabell 3.2. En översikt visande jämförelser mellan fördelningar av uppgifternas lösningsfrekvenser i procent för Medelsta-elever över medianen och de 15 procent lägst presterande i samma uppgifter (SUM-eleverna).

| Årskurs | Elever över medianen |          | SUM-elever   |          |
|---------|----------------------|----------|--------------|----------|
|         | Korrekt svar         | Fel svar | Korrekt svar | Fel svar |
| 1       | 5065                 | 515      | 1022         | 838      |
|         | 91%                  | 9%       | 55%          | 45%      |
| 2       | 8361                 | 671      | 1655         | 803      |
|         | 93%                  | 7%       | 67%          | 33%      |
| 3       | 6557                 | 1263     | 891          | 1909     |
|         | 84%                  | 16%      | 32%          | 68%      |
| 4       | 6770                 | 1510     | 1220         | 1084     |
|         | 82%                  | 18%      | 53%          | 47%      |
| 5       | 6108                 | 994      | 1066         | 1011     |
|         | 86%                  | 14%      | 51%          | 49%      |
| 6       | 5078                 | 1227     | 666          | 946      |
|         | 81%                  | 19%      | 41%          | 59%      |
| 7       | 5633                 | 1048     | 860          | 1868     |
|         | 84%                  | 16%      | 32%          | 68%      |
| 8       | 5378                 | 1032     | 722          | 1390     |
|         | 84%                  | 16%      | 34%          | 66%      |
| 9       | 5595                 | 1373     | 884          | 1404     |
|         | 80%                  | 20%      | 39%          | 61%      |

### 3.2 RESULTATEN I DE ÅRSKURSTYPISKA UPPGIFTERNA

Då vi försökte att rekonstruera mål att uppnå ur Lpo 94, visade sig dessa vara så allmänt hållna och så föga specificerade att vi inte kunde finna en direkt utbildningsmöjlighet av årskurstypiska uppgifter till 2002 års undersökning. Dessutom har statsmakterna stadgat att det räcker med mål att uppnå angivna för årskurserna 5 och 9. I stället för att karakterisera några uppgifter som årskurstypiska, gjorde vi en egen bedömning men saknade ett fast underlag för kunskapsspecificeringen. Det är egentligen omöjligt för lärare att veta vad statsmakterna vill att de ska undervisa om i årskurs 1 eller – över huvud taget – alla andra årskurser än årskurserna 5 och 9. Att med stöd av

Lpo 94 konstruera kunskapsprov för kontroll av matematikundervisningens resultat och jämföra undervisningen i andra årskurser ur skilda skolmiljöer är ett närmast ogörligt företag.

Detaljstudierna över elevernas uppgiftslösningar antyder att många elever företer en nedåtgående trend. Detta fenomen märks föga för eleverna över medianen. Men det urskiljs tydligt för eleverna under medianen och i synnerhet för de 15 procent lägst presterande. Det allmänna samlaget presenteras i tabellerna 3.3 och 3.4.

Tabell 3.3. Medelsta 1977. Genomsnittliga lösningsfrekvenser i procent för bland annat årskurstypiska uppgifter som bedömts tillhöra matematikinläringen i grundskolans årskurser 1–9 enligt Lgr 69.

| Årskurs                                       |   | 1 h  | 1 v | 2     | 3  | 4     | 5  | 6  | 7     |
|-----------------------------------------------|---|------|-----|-------|----|-------|----|----|-------|
| Elevers lösningsfrekvens i respektive årskurs | 1 | 84** | 80  | 65    | –  | (70)* |    |    |       |
|                                               | 2 |      | 90  | 81    | –  | 83    |    |    |       |
|                                               | 3 |      |     | 87    | 79 | 86    |    |    |       |
|                                               | 4 |      |     | 86    | 79 | 74    |    |    |       |
|                                               | 5 |      |     | (90)* | 87 | 78    | 68 |    |       |
|                                               | 6 |      |     | (91)* | 89 | 82    | 74 | 64 | (70)* |
|                                               | 7 |      |     |       |    | 79    | 75 | 63 | 62    |
|                                               | 8 |      |     |       |    | 81    | 73 | 63 | 62    |
|                                               | 9 |      |     |       |    | 93    | 77 | 66 | 67    |

\*) Inom parentes angivna värden avser att observationerna är få.

\*\*) Årskurstypiska uppgifter anges med fetstil.

Begreppet årskurstypisk uppgift används för att ange uppgifter i Medelsta-diagnoserna vilka bedöms tillhöra undervisningen i en bestämd årskurs. För årskurs 1 har årskurstypiska specificerats som de uppgifter i Medelsta-diagnoserna i vilka eleverna förväntas "bearbeta och förvärva grundliga kunskaper och färdigheter" inom årskursen (Lgr 80, sidan 99) under perioden från höstterminens början till tidpunkten för testningen, det vill säga fram till 1 mars. Motsvarande definitioner för övriga årskurser avser också tiden augusti–februari under det pågående läsåret. Man bör erinra sig den omständigheten

att årskurstypiska uppgifter bara konstruerades för årskurserna 1–7. Kanske kan man beklaga detta i efterhand. Skälen var dels svårigheten att inom årskurserna 8 och 9 läsa ut av läroplanerna Lgr 69 och Lgr 80 vilka kursmoment som tillhörde målen för årskurserna 8 och 9, dels lärarnas önskemål att undvika att testa kurskrav som var frusterande för de svagaste eleverna.

Tabell 3.3 ger vid handen att genomsnittliga lösningsfrekvensen för de årskurstypiska uppgifterna i 1977 års Medelsta-undersökning sjunker från 80–84 procent i årskurs 1 till 62 procent i årskurs 7 (feta siffror). Enligt tabell 3.4 är i 1986 års undersökning den genomsnittliga lösningsfrekvensen för de årskurstypiska uppgifterna 81 procent i årskurs 1 och går ned till 56 procent i årskurs 7 (också här feta siffror).

Tabell 3.4. Medelsta 1986. Genomsnittliga lösningsfrekvenser i procent för bl.a. årskurstypiska uppgifter som bedömts tillhöra matematikinläringen i grundskolans årskurser 1–9 enligt Lgr 80.

| Årskurs                                       |   | 1 ht | 1 vt | 2    | 3  | 4     | 5  | 6  | 7    |
|-----------------------------------------------|---|------|------|------|----|-------|----|----|------|
| Elevers lösningsfrekvens i respektive årskurs | 1 | 82** | 80   | 74   | –  | (77)* |    |    |      |
|                                               | 2 | 92   |      | 81   | –  | 85    |    |    |      |
|                                               | 3 |      |      | 83   | 71 | 68    |    |    |      |
|                                               | 4 |      |      | 86   | 81 | 72    |    |    |      |
|                                               | 5 |      |      | (93) | 89 | 79    | 69 |    |      |
|                                               | 6 |      |      |      |    | 78    | 79 | 57 | (49) |
|                                               | 7 |      |      |      |    | 80    | 83 | 62 | 56   |
|                                               | 8 |      |      |      |    | 84    | 85 | 67 | 66   |
|                                               | 9 |      |      |      |    | 84    | 87 | 65 | 65   |

\*) Inom parentes angivna värden avser att observationerna är få.

\*\*) Årskurstypiska uppgifter anges med fetstil.

Tabellerna 3.3 och 3.4 anger också lösningsfrekvenser i övrigt. Exempel: För årskurs 4 är den iakttagna lösningsfrekvensen 74 procent för årskurstypiska uppgifter. Årskurstypiska uppgifter i årskurs 2 och 3 löstes med 86 respektive 79 procent. I dessa fall betraktar vi inte uppgifterna som årskurstypiska eftersom de avser andra årskurser

än de vilka avsågs i uppgiftskonstruktionen. I regel är det högre värden åt vänster i tabellerna och lägre åt höger. Uppgifter på samma rad tillhör uppgifter som använts i en given årskurs. Vi kan tolka utfallet. Såväl för de årskurstypiska uppgifterna som övriga uppgifter gäller, att högstadieeleverna äger lägre kunskaper eller färdigheter inom några av de nytillkomna kursmomenten än eleverna i de lägre årskurserna.

Men det är också anmärkningsvärt att elever väl klarar uppgifter som skulle läras mycket senare enligt läroplanen. Detta finner vi bland annat i övningstyper inom räknesätten, där bland annat multiplikation och division enligt kursplanen förs in relativt sent.

Det visar sig att samtliga differenserna för årskurstypiska uppgifter skiljer sig signifikant både för år 1977 och 1986 (Magne 1990b).

Slutsatsen är att de årskurstypiska uppgifterna i de båda tidiga Medelsta-undersökningarna både 1977 och 1986 får lägre och lägre lösningsfrekvenser från årskurs till årskurs. Vår tolkning: eleverna i grundskolan får gradvis allt lägre prestationsnivå i relation till specifikationerna i läroplanerna Lgr 69 och Lgr 80 för respektive årskurs. Vi kan komplettera detta med iakttagelser som man gör vid studiet av tabell 3.1 och 3.2. Enligt dessa tabeller är nedgången tydligen ringa för elever över medianen, men däremot mycket kraftig för de lägst presterande eleverna, SUM-eleverna. Vi tolkar detta så, att de 50 procent framgångsrikare eleverna lärt sig de årskurstypiska uppgifterna, medan de lägst presterande eleverna helt misslyckats med detta inlärande.

Vi har gjort en preliminär skattning av vilka uppgifter som är årskurstypiska i årskurs 5 i 2002 års undersökning. Därvid har vi utgått från kursplanens angivande av mål att uppnå och bedömt uppgifterna i relation de kategorier som nämnts. Av de sammanlagt 67 uppgifterna i diagnoserna 7, 8 och 9 har 19 bedömts kunna specificeras att tillhöra inläringen i årskurs 5. Vi får då tabell 3.5. Som sammanfattning av lösningsfrekvenserna för de för årskurs 5 årskurstypiska uppgifterna. Givetvis är denna skattning ytterst osäker på grund av de svårbedömda specificeringen i kursplanen. I tabell 3.5 redovisas lösningsfrekvenserna både för hela populationen i respektive årskurser och SUM-eleverna. Jämför man motsvarande utvärdering för 1977 och 1986 års undersökningar erhåller vi ett genomsnittsvärde för 2002 års elever som ligger klart över 1977 och 1986 års genomsnitt.

Vad beträffar SUM-eleverna visas att de har ett genomsnitt som vida understiger lösningsfrekvenserna för övriga elever. I årskurs 9 når de ett genomsnitt på 59 procent genomsnittlig lösningsfrekvens. I

årskurs 5 noteras en genomsnittlig lösningsfrekvens på 83 procent för årskurs 5-uppgifterna och i årskurs 4 på 70 procent. SUM-eleverna i årskurs 9 har alltså ett lägre värde än genomsnittet för årskurs 5 och till och med under det noterade resultatet för årskurs 4. Undervisningen har alltså för årskurs 9:s SUM-elever givit ett resultat som inte svarar mot prestationerna i årskurs 4.

Tabell 3.5. Genomsnittliga lösningsfrekvenser i procent i de uppgifter vilkas skattas vara årskurstypiska i årskurs 5 enligt Lpo 94.

| Årskurs         | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
|-----------------|----|----|----|----|----|----|
| Samtliga elever | 70 | 83 | 88 | 88 | 91 | 90 |
| SUM-elever      | 31 | 37 | 47 | 48 | 59 | 59 |

Sammanfattningsvis leder undervisningen till att eleverna tillgodo-gör sig färre och färre av de i matematik föreskrivna målen i Lgr 69 och Lgr 80 ju högre årskurs de går i.

Medan man skulle vilja ställa önskemålet om allt bättre och bättre prestationer i relation till de årskurstypiska kunskapsmålen, både kvantitativt och kvalitativt, förefaller verkligheten vara den motsatta. Eleverna lär sig mindre och mindre andel av de successiva kunskapsmålen. Beklagligtvis är det omöjligt att ange årskurstypiska uppgifter enligt Lpo 94, varför det är omöjligt att mäta och utvärdera elevernas prestationer i relation till kursplanens mål. Antingen har kursplaneförfattarna och i sista hand regeringen misslyckats med planeringen av kursmålen. Eller också ligger felet i att anordna undervisningen så, att eleverna förstått och lärt in de kunskapsmoment som tillhör de högre årskurserna. Vi anser att en flerkfaktor-modell bäst förklarar dessa observationer.

Givetvis gäller inte dessa tolkningar andra förhållanden än de som vi utarbetat för Medelsta-undersökningarna. Fortsatta undersökningar måste betraktas som nödvändiga, utförda med nödvändiga kontrollbetingelser. Sådana fortsatta kontrollstudier hälsas med tillfredsställelse av författarna.

## KAPITEL 4

### SUM-ELEVERNAS MATEMATIKKUNSKAPER – EN KVALITATIV ANALYS

## 4.1 KURSPLANEN OCH INLÄRNINGSTEORIN

Lgr 80 kan betraktas som en pendang till föregångaren Lgr 69, som introducerade den nya matematiken och mängdläran. Det var ett försök att modernisera den dåvarande matematikutbildningen vilken ansågs vara föråldrad i de flesta västländer. Kritik riktades dock ganska omgående mot de nya reformerna och som en reaktion växte den så kallade *back-to basics*-rörelsen fram. Lgr 80 kan ses som ett barn av dess anda med starka behavioristiska utgångspunkter med sin starka betoning på baskunskaper.

Den associationistiska (behavioristiska) ansatsen har sitt moderna ursprung i tankegångar från bland andra de amerikanska psykologerna Thorndike och Woodworth (1901) vilka betecknade den som "de identiska elementens teori". Behaviorism blev ett modeord med amerikanen Watson (1914) Behavioristerna kring Skinner (1938) fortsatte detta tänkande. Gagné och Paradise (1961) fullföljde med den "kumulativa inläringsteorin", specifikt med inriktning på skolmatematik. Vi finner uppföljare i dagens samhälle, framför allt i skolans praxis så kallade neobehaviorister i USA, ehuru ända sedan 1910-talet nya forskningar visade hur felaktiga grundantagandena är inom associationismen/ behaviorismen. Kritiken kom framför allt från europeiska forskare inom psykoanalys, gestaltpsykologi, kognitionsvetenskap (till exempel konstruktivism) och utmynnade i nya teori-bildningar som "upptäckande"-inlärande och rationell undervisningsteori (se Magne 2006).

Lgr 80 förefaller huvudsakligen använda sig av den behavioristiska ansatsen: "Matematikämnets struktur gör att ett moment i regel bygger på förkunskaper från andra moment" (Lgr 80, s 99). Inom avsnittet "grundläggande aritmetik" heter det: "Repetitioner och individuella diagnoser är speciellt angelägna i aritmetik, eftersom de olika räknesätten bygger på varandra" (Lgr 80, s 100). Utta-landet kan ses som överdrivet förenklat, men tvetydigt. Hur bygger räknesätten på varandra? Naturligtvis finns det ett ömsesidigt logiskt samband mellan räknesätten. De är förenade med "räknelagar", om det är detta som menas i den citerade meningen. Men sambandet är inte linjärt i geometrisk betydelse eller i innebörden av en "hierarki". Lgr 80 säger vidare: "En elev får inte börja med ett nytt moment utan tillräcklig grund från tidigare moment" (Lgr 80, s 99). Åter finns ett behavioristiskt argument. Men vilken är denna "grund"?

Medelsta-undersökningarnas felanalyser visar många paradox-ala effekter av elevernas självständiga skaparförmåga visavi kurs-

planestoffet. Först ett par vägledande exempel. Senare ska vi återkomma med några systematiska sammanställningar av elevernas problemlösningar.

Exempel 1. Eleverna i årskurs 1 har i alla tre undersökningarna lösningsfrekvenser omkring 70 procent med tresiffriga tal i addition vilka de tycks förväntas möta först i årskurs 3. Var tionde skolnybörjare löser subtraktionsuppgiften  $21 - 7$ .

Exempel 2. Eleverna i årskurs 3 har 65 procent lösningsfrekvens på uppgiften  $302 - 40$ , och inte mindre än 84 procent lösningsfrekvens på uppgiften:

$$\begin{array}{r} 670 \\ - 208 \\ \hline \end{array}$$

Den senare löses tydligen med mekanisk drillstrategi och därigenom hindras lösandet av den förra.

Exempel 3. Endast 66 procent löser uppgiften:  $\frac{6000}{10}$

men 77 procent löser:  $\frac{7228}{4}$

Den första uppgiften ska rimligtvis klaras omedelbart utan beräkning om man är bevandrad i divisionens teori. Men tydligen förvärvade SUM-eleverna rutin i den "långa divisionen", däremot inte insikt i den enkla analogitankegången. I det senare fallet krävs egentligen bara sunt förnuft (logiskt tänkande), fast denna tycks ha utplånats av mekanisk drill.

Medelsta-observationerna i Magnes bok från 1990 tyder på att SUM-eleverna har en osäker taluppfattning och oklart omdöme. Inte desto mindre finner vi att också SUM-eleverna i Medelsta ofta lyckas tänka ut korrekt svar på dessa mer komplexa problem trots den bristande taluppfattning som Lgr 80 ansåg vara den nödvändiga förkunskapen.

Observationer som vi gjort i Medelsta indikerar, att varken lärare eller elever följt någon "de identiska elementens teori" eller "kumulativ inlärningsteori". Elevreaktionerna kan tyckas ha reglerats av en spontan strävan att undersöka olika lösningsstrategier.

## 4.2 MATEMATIKPRESTATIONERNAS FÖRDELNINGSFORM

Spridningen mellan höga och låga prestationer är stor i alla Medelstas klasser och årskurser. Detta framgår av såväl Magne (1990b) som Engström och Magne (2003). Alla diagnoserna har sned fördelning. Detta är en följd av konstruktionsarbetet, emedan vi sökt att särskilt studera låga prestationer. Den generella fördelningsformen för matematikförmågan har diskuterats och man har i regel antagit att fördelningen antingen är normalfördelad eller Poisson-fördelad.

En annan sak är att matematikundervisning, matematikinlärande och matematikkunskaper icke är lika med matematik. Matematik kan möjligen beskrivas som ett abstrakt begreppssystem, medan kunskapen om matematik snarare kan förstås som ett system av mänskliga individuella mer eller mindre rationella beteendeprocesser.

Hur som helst, så finner vi i Medelsta-undersökningarna inga tecken till kvalitativa språng i fördelningarna av prestationerna, vilket möjligen förutsätts i den nya kvalitativa betygssättningen. Vi tror att matematikförmågan är en biologisk mätbar företeelse och att den kan beskrivas som en kontinuerlig funktion.

Det finns anledning, menar vi, att behandla elevernas matematikprestationer som en gradvis, ständigt föränderlig process. Alla elever förmodas ha potential till ökad behållning av inlärande till följd av undervisning. En tillväxt av kunskaper och färdigheter antas äga rum och denna förstår vi som en biologisk-social utveckling för alla individer. Således är det osannolikt att matematikförmågan är kvalitativt olika för olika individer. Den kan emellertid uppfattas som en union av flera delförmågor. SUM-elever förutsättes alltså ingå som en delmängd i samma kontinuum som präglar matematikinläring och matematikbehållning över huvud taget, likaväl som hos matematikgenierna.

Det är uppenbart, som följd av detta resonemang, att betygssättning sätter en konstlad gräns mellan vissa bedömningsvärden och inte motsvaras av matematikkunskapens kontinuerliga natur.

För att belysa SUM-elevernas undersökningsförmåga har vi valt att studera uppgiftslösningar. Ett urval har gjorts av SUM-eleverna i årskurserna 1, 4, 5 och 9. Vi ska visa uppgifter med en behållningsnivå på över 70 procent och under 30 procent och ge exempel hur eleverna har löst sina uppgifter.

## ÅRSKURS 9

Det är 26 SUM-elever (16,7 procent av 156) varav 10 är pojkar och 16 flickor. Att vi inte fått fram exakt 15 procent beror på att vi satt strecket mellan två heltal. Vi börjar med de 9 uppgifter som har lösningsfrekvens mellan 73 och 100 procent (se figur 4.1), alltså 10 procent av det totala antalet 88 uppgifter för årskurs 9. Vid en jämförelse mellan eleverna över medianen (Ö-elever) och SUM-eleverna får man fram följande procentuella lösningsfrekvens:

Tabell 4.1. Uppgifter som SUM-elever i årskurs 9 löst inom behållningsnivån 70–100 procent.

| Uppgift    | 8A | 8B | 8C | 8G | 8J | 8P | 9B  | 9C | 9E |
|------------|----|----|----|----|----|----|-----|----|----|
| Ö-elever   | 99 | 99 | 96 | 99 | 97 | 91 | 99  | 98 | 93 |
| SUM-elever | 88 | 92 | 88 | 96 | 77 | 73 | 100 | 92 | 77 |

Det kan tilläggas att Ö-eleverna har frekvenser över 90 procent i ytterligare 25 av de 88 uppgifterna (alltså sammanlagt 36 uppgifter).

Magnes  
Matematikdiagnoser 8

(A) SKRIV MED SIFFROR

TIO TUSEN FYRA .....

Magnes  
Matematikdiagnoser 8

(B) SKRIV MED SIFFROR

TJUGOFEMTUSEN .....

Magnes  
Matematikdiagnoser 8

(C) SKRIV MED SIFFROR

EN MILJON .....

Magnes  
Matematikdiagnoser 8

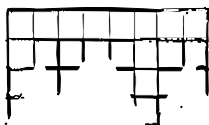
(G) 1 TIMME 3 MINUTER ÄR .....MINUTER

Magnes  
Matematikdiagnoser 8

(J) FEM CENTIMETER ÄR .....MILLIMETER

Magnes  
Matematikdiagnoser 8

(P) MULTIPLIKATION  $6 \cdot 149$



Magnes  
Matematikdiagnoser 9

Avrunda priserna som man gör i affärer.

Varorna kostar

Du ska betala

5 kr 48 öre

5 kr 50 öre

(B)

1 kr 2 öre

Avrunda priserna som man gör i affärer.

Varorna kostar

Du ska betala

5 kr 48 öre

5 kr 50 öre

(C)

99 kr 99 öre

Magnes  
Matematikdiagnoser 9

Ordna dessa tal. Börja med det minsta.

(E) 1,1    10,5    0,1067    1,0765    6,8

Skriv här: \_\_\_\_\_

Magnes  
Matematikdiagnoser 9

Figur 4.1. Uppgifter som SUM-elever i årskurs 9 löst inom behållningsnivån 70–100 procent.

Hur är de nämnda nio uppgifterna beskaffade? Vi kan rubricera dem som 7 taluppfattning, 1 mätning (geometri) och 1 räknesätt. Uppgifterna har en enkel språkdräkt. Det är vidare bara en enda enkel problemställning. Slutligen kan man förmoda att det handlar om vardagskunskap som eleverna dagligen och stundligen möter och påverkas av både i och utanför skolan.

Då SUM-eleverna lyckas med uppgifterna i figur 4.1 så bra som de gjort, kan förklaras med

- att det rör sig om synnerligen okomplicerad uppgiftstyp och
- att eleverna känner till dessa räkneexempel från sitt eget vardagsliv.

Låt oss nu se på uppgifterna med upp till 30 procent lösningsfrekvens för SUM-eleverna i årskurs 9. I följande uppgifter har SUM-elever lägre lösningsfrekvens än 30 procent, och motsvarande frekvens för Ö-elever visas:

Tabell 4.2. Uppgifter med lägre lösningsfrekvens än 30 procent för SUM-eleverna i årskurs 9.

| Uppgift    | 9O | 10A | 10B | 10C | 10E | 10F | 10G | 10H | 10I | 10J | 10K |
|------------|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Ö-elever   | 76 | 84  | 85  | 80  | 81  | 77  | 88  | 78  | 83  | 52  | 84  |
| SUM-elever | 27 | 19  | 27  | 12  | 15  | 12  | 27  | 12  | 15  | 15  | 27  |

| Uppgift    | 10L | 10Q | 10R | 10S | 10U | 10X |
|------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Ö-elever   | 74  | 70  | 73  | 80  | 89  | 81  |
| SUM-elever | 23  | 27  | 19  | 27  | 27  | 27  |

| Uppgift    | 11A | 11B | 11C | 11G | 11H | 11I | 11J | 11K | 11L | 11M | 11N |
|------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Ö-elever   | 68  | 77  | 89  | 99  | 93  | 96  | 80  | 82  | 23  | 71  | 91  |
| SUM-elever | 8   | 4   | 15  | 27  | 15  | 15  | 4   | 15  | 0   | 0   | 23  |

| Uppgift    | 11O | 11P | 11Q | 11R | 11T | 11U | 11V | 11X | 11Y | 11Z | 11Å |
|------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Ö-elever   | 23  | 74  | 68  | 73  | 93  | 98  | 95  | 80  | 88  | 87  | 83  |
| SUM-elever | 0   | 12  | 0   | 0   | 15  | 23  | 15  | 0   | 4   | 0   | 8   |

Som vi ser är det 39 uppgifter där SUM-eleverna inte nått upp till 30 procent lösningsnivå (44 procent av uppgifterna). Endast två uppgifter understiger denna lösningsnivå för Ö-eleverna.

I figur 4.2 finns exempel (7 stycken) där ingen SUM-elev presterat korrekt svar. Vi bedömer att dessa 7 ”noll-uppgifter” representerar föl-

jande huvudområden: ekvationslösning 1, taluppfattning (decimaler) 2, procent 2 och geometri 2. I figur 4.3 återger vi 18 uppgifter med lösningsfrekvenser mellan 1 och 15 procent. Här rör det sig om taluppfattning (koordinatsystem) 2, taluppfattning (bråk) 3, taluppfattning (decimalform) 3, procent 4, räknesätten 5 (S 2, M 1, D 2) och geometri 1.

Magnes  
Matematikdiagnoser 11

- PRODUKTEN AV TVÅ FAKTORER ÄR 750.  
 ① DEN ENA FAKTORN ÄR 7,5.  
 DEN ANDRA FAKTORN ÄR .....

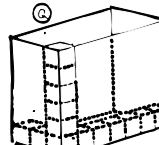
Magnes  
Matematikdiagnoser 11.

HUR MÅNGA KLOSSAR?



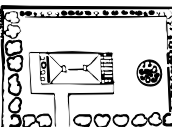
27 KLOSSAR

HUR MÅNGA KLOSSAR FÅR PLATS I LÅDAN?



..... KLOSSAR

Magnes  
Matematikdiagnoser 11.



HÄR MED LINJALEN.

Denne figur föreställer en tomt med en villa.  
 1 cm på bilden föreställer 10 m i verkligheten.

HUR BRED ÄR TOMTEN? SVAR: 35 m

HUR LÅNG ÄR TOMTEN? SVAR: .....

HUR MÅNGA KVADRATMETER ÄR TOMTENS AREA? SVAR: .....

Magnes  
Matematikdiagnoser 11

DESSA TAL ÄR SKRIVNA I DECIMALFORM: 0,1; 2,75

SKRIV I DECIMALFORM

① en tiondel

② sju hela sexton tiondölar

③ fyra femtedelar

|     |
|-----|
| 0,1 |
|     |
|     |

Magnes  
Matematikdiagnoser 11

PROCENTRÄKNING

①  $\frac{73}{100} = \dots\dots\dots\%$

②  $\dots\dots\dots\%$  AV 200 KR ÄR 12 KR.

Figur 4.2. "Noll"-uppgifter som SUM-elever i årskurs 9 icke löst korrekt.

**Magnes**  
**Matematikdiagnoser 10**

SKRIV TALPAR SOM SVARAR MOT PUNKTERNA.

D ( 0, 4 )  
 E (   ,    )  
 F (   ,    )

**Magnes**  
**Matematikdiagnoser 11**

**DIVIDERA**

$$\begin{array}{r} 72,48 \\ 80 \end{array}$$

**MULTIPLICERA**

 $10,6 \cdot 7,02$

**Magnes**  
**Matematikdiagnoser 11**

**DIVISION**

$$\frac{5}{8}$$

**Magnes**  
**Matematikdiagnoser 11**

**SUBTRAHERA**

 $10,7 - 3,255$

**SUBTRAHERA**

 $3\frac{1}{6} - 1\frac{5}{6}$

**Magnes**  
**Matematikdiagnoser 11**

SKRIV TAL SOM FATTAS I FÖLJANDE BRÅK

ⓓ  $\frac{1}{1} = \frac{10}{100}$

ⓔ  $\frac{2}{5} = \frac{4}{  }$

ⓕ  $\frac{4}{1} = \frac{2}{10}$

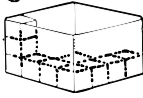
**Magnes**  
**Matematikdiagnoser 11**

HUR MÅNGA KLOSSAR?



27 KLOSSAR

HUR MÅNGA KLOSSAR FÅR PLATS I LÅDAN?



   KLOSSAR

**Magnes**  
**Matematikdiagnoser 11**

**SKRIV SOM PROCENT**

ⓓ 1,07 = ..... %

**SKRIV SOM DECIMALTAL**

ⓕ 8 % = .....

ⓕ  $\frac{75}{100} = \dots\dots\dots\%$

BO HADE 100 KULOR.  
HAN TÄPPADE 6 KULOR.

ⓓ BO HADE KVAR ..... % AV KULORNA.

**Magnes**  
**Matematikdiagnoser 10**

SKRIV I DECIMALFORM

ⓓ Tre hela och åtta hundraodelar

ⓔ Två tusendelar

SVAR: .....

SVAR: .....

**Magnes**  
**Matematikdiagnoser 11**

DESSA TAL ÄR SKRIVNA I DECIMALFORM: 0,1; 2,75

SKRIV I DECIMALFORM

ⓓ en tiodel

ⓔ en hel fyra tusendelar

0,1

Figur. 4.3. Uppgifter som SUM-elever i årskurs 9 löst inom behållningsnivån 1–15 procent.

Det första som slår iakttagaren är att det rör sig om förhållandevis enkla matematiska beräkningar eller begreppsbestämningar. Årskurs 9:s Ö-elever når nästan alltid över den 80-procentiga behållningsnivån.

Det är fråga om matematiskt elementära kunskapsmoment som traditionellt anses vara mycket viktig kunskap. De flesta matematiklärare skulle betrakta dessa kunskaper och färdigheter som oundgängligt nödvändiga för att klara de fortsatta studierna i gymnasieskolan. Inte desto mindre är det för de lägst presterande eleverna mycket dåligt beställt med behållningen av undervisningen i fråga om naturliga tal, rationella tal och decimaler, jämte diverse andra grundläggande begrepp.

Kan man se något gemensamt i dessa uppgifter? Det är inte helt lätt. Några uppgifter måste betraktas som enkla, som 11M, 11X och 11Z och ändå lyckas ingen SUM-elev lösa dem. Andra uppgifter som tycks vara lätta men med ringa behållning är 11C, 11H, 11I, 11K, 11N, 11T, 11U, 11V, 11Y, 11Å. Varför är lösningsfrekvensen så låg i dessa fall? Kanske är det ett misstag att bedöma elevernas prestationer utifrån de vuxnas måttstock. Intervjuar man dessa elever, blir resultatet ofta att SUM-eleverna säger sig uppleva uppgifternas komplexitet på deras eget sätt, annorlunda än intervjuaren förutsätter.

Eleverna utarbetar ofta egna "tankeregler", till exempel i fråga om uppgiften 11C, på grund av argumentet att de upplever att det inte går att subtrahera ett tresiffrigt tal med ett fyrsiffrigt utan att då vända på steken. Över huvud taget förekommer logiska omkastningar alltför ofta bland SUM-elever – inte bara som i subtraktionsfallet – utan också ibland annat division, reguladetri, algebra och problem med resevaluta. Vissa elever tycker uppenbart att skolmatematiska problem har litet eller nästan inget att göra med elevernas vardagsvärld. De uppfattar ofta matematik som överklig och formalistisk och utan livsanknytning.

I många fall uppfattas en uppgift som utomordentligt komplex (10A, 11C, 11Y), emedan eleven upplever dem som en divisionsbeteckning och inte som bråk, och division avskys som något svårt, motbjudande, olösligt. Andra fall tolkas som komplexa, därför att de omfattar mer än ett matematiskt undervisningsområde, till exempel 11J, 11O, 11Q och 11R. Hade formuleringarna närmast sig elevernas talspråk skulle eleverna kanske fattat innehållet i problemen bättre.

Hur ser de uppgifter ut som eleven kan och inte kan? De uppgifter där SUM-eleverna har högst lösningsfrekvens är uppgifter som förekommer i all kommunikation mellan människor och som praktiseras redan av små barn och utanför skolan. Kan det vara så att

lösningsstrategier som SUM-eleverna tillämpar i dessa uppgifter lärs utan skolans medverkan? I det sociala umgänget? Av barn som lyssnar på föräldrarna och kamraterna? I godisaffärerna, på lekplatsen, vid TV-apparaten?

Och de övriga. De svåra. De komplexa och formella. Har undervisningen nått fram?

Varför misslyckas SUM-eleverna med uppgifter som de i figur 4.2 och 4.3? Vi menar att följande hypoteser är tänkbara och borde prövas: Att de berör (a) det matematiska innehållet, (b) elevens personlighet och (c) undervisningens organisation och kommunikation:

- Eleverna uppfattar många gånger uppgifterna som överkliga och formella.
- Den subjektiva upplevelsen är att uppgiften representerar komplexa frågeställningar utanför elevens erfarenhet och tankekraft.
- Kunskapen består av ibland både ”korrekta” och ”felaktiga” regler som det gäller att följa i en separat fiktiv matematikens värld.
- Då det matematiska innehållet är skenbart komplext, försöker eleven förenkla det.
- Undervisningssystemet kan ha gynnat mekanisk procedurfärdighet.

Man får en känsla av att niondeklassarna hämmats i sin kunskapsutveckling. Har skolans undervisning lämnat djupa spår i dessa elevers inläring?

Kort sagt, om vi ställer saken på sin spets med en svårt försåtlig fråga: har SUM-eleverna i nian lärt matematik i skolan? Vad beror på (a) matematiken, (b) eleverna, (c) samhälls- eller skolpolitiken?

## ÅRSKURS 1

Låt oss se på några uppgifter i årskurs 1. Uppgifterna i figur 4.4 har SUM-eleverna i årskurs 1 löst inom behållningsnivån 85–100 procent. Det betyder att uppgifterna tenderar att vara korrekt besvarade. Uppgifterna är följande och vi kan jämföra lösningsfrekvenserna för eleverna över medianen i årskurs 1 med SUM-eleverna:

Tabell 4.3. Uppgifter med 85–100 procents behållningsnivå för SUM-elever i årskurs 1.

| Uppgift    | 1A | 1F | 1G  | 1H | 1O  | 1Q | 1R  | 2A  | 2B  | 2G | 2L  |
|------------|----|----|-----|----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|
| Ö-elever   | 99 | 96 | 100 | 97 | 100 | 99 | 100 | 98  | 100 | 99 | 100 |
| SUM-elever | 97 | 87 | 100 | 97 | 94  | 94 | 94  | 100 | 100 | 94 | 94  |

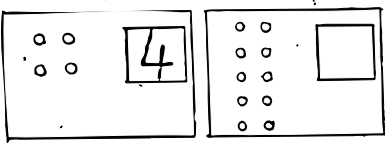
Vi kan notera att eleverna testats med de nu nämnda uppgifterna (se figur 4.4) omkring 1 mars, det vill säga efter något mera än halva läsåret. Ö-eleverna har nått något högre resultat men skillnaden mellan de två elevgrupperna är ganska liten. Man kan tolka saken så, att den undervisning som ägt rum fått båda grupperna att nå de utbildningsmål som möjligen mäts med de angivna diagnoserna.

Frågan är om det finns något typiskt drag som utmärker dessa uppgifter med höga behållningskoefficienter? Vi finner att det är uppgifter som bara handlar om tal. Talen är naturliga. De är en- och tvåsiffriga. Uppgifterna skiljer sig däri att det ibland är fråga om att urskilja och översätta fysiska mönster till tal, att läsa talord och skriva siffror, att ange tals ordning och – i några fall – att göra en addition. Innehållet är mycket enkelt, lätt och överskådligt. Något mer gemensamt karaktärsdrag? Jo, att det är vad som brukar kallas ett-stegs-uppgifter.

I årskurs 1 löser eleverna dessa uppgifter, vare sig de är Ö-elever eller SUM-elever. De är rätt jämbördiga, bara det handlar om tal-uppfattning av små naturliga tal.

Magnes  
Matematikdiagnoser 1

SKRIV TAL I RUTAN

(A) 

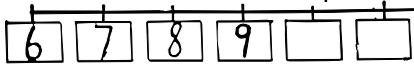
SEX ☒ 6

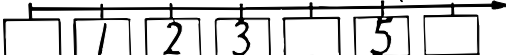
(F) TRE ☐

(G) ÅTTA ☐

(H) TIO ☐

Magnes  
Matematikdiagnoser 1

(N) 

(O) 

Magnes  
Matematikdiagnoser 1

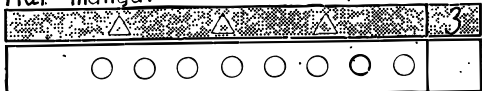
SKRIV SVÄR PÅ STRECKEN

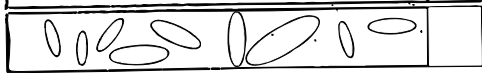
(Q)  $2+4=$  \_\_\_\_\_

(R)  $1+9=$  \_\_\_\_\_

Magnes  
Matematikdiagnoser 2

Hur många?

(A) 

(B) 

Magnes  
Matematikdiagnoser 2

Skriv tal som fattas.

(G) 7, 8, 9, \_\_\_\_\_

Magnes  
Matematikdiagnoser 2

Vilket tal är störst? Rita kryss.

(L) 

Figur 4.4. Uppgifter som SUM-elever i årskurs 1 löst inom behållningsnivån 85–100 procent.

Vi går vidare till uppgifterna som återges i figur 4.5. I dessa uppgifter är behållningen avsevärt lägre och varierar från 13 procent till 23 procent. Låt oss göra en översikt hur de procentuella lösningsfrekvenserna ter sig för Ö- och SUM-elever:

Tabell 4.4. Lösningfrekvenser för Ö- och SUM-elever i årskurs 1.

| Uppgift    | 1a | 1c | 1d | 1Z | 2E | 2Q | 2R | 2V | 2Y | 2Z  |
|------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| Ö-elever   | 94 | 96 | 87 | 89 | 75 | 75 | 64 | 63 | 99 | 100 |
| SUM-elever | 13 | 23 | 13 | 23 | 16 | 23 | 16 | 16 | 19 | 23  |

Nu har det blivit stora differenser mellan Ö- och SUM-eleverna. Inte heller eleverna över medianen är alltid så framgångsrika. De klarar sex av uppgifterna utan större besvär, men i fyra av uppgifterna har bara mellan tre fjärdedelar och två tredjedelar fått rätt svar. Hur ser uppgifterna ut? Taluppfattning 1 (rätt komplicerat), geometrisk avbildning 2 (onekligen krävande), pengar 4 (svåröverskådligt), räknesätt 2 (flerstegsuppgift), textuppgift 1 (flerstegsuppgift).

Magnes  
Matematikdiagnoser 1

②  $3+10+6=$  \_\_\_\_\_      a.  $\_\_\_ + \_\_\_ = 4$

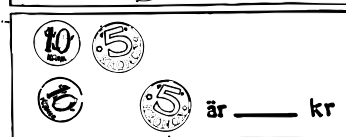
Magnes  
Matematikdiagnoser 1

Hur många  
kronor?

③



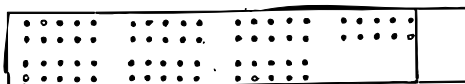
④



Magnes  
Matematikdiagnoser 2

Hur många?

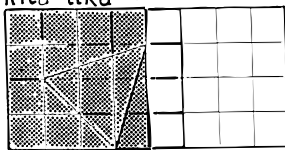
⑤



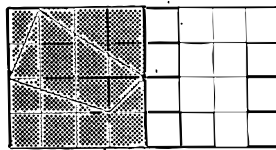
Magnes  
Matematikdiagnoser 2

Rita lika

⑥



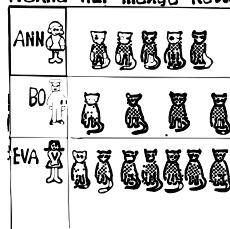
⑦



Magnes  
Matematikdiagnoser 2

Räkna hur många katter det blir.

⑧



Eva har \_\_\_\_\_ katter fler än Bo.

Magnes  
Matematikdiagnoser 2

⑨



Figur 4.5. Uppgifter som SUM-elever i årskurs 1 löst inom behållningsnivån 11–25 procent.

Kan man finna något gemensamt i dessa uppgifter? Vårt förslag är att det är uppgifter med mera komplext innehåll än för de uppgifter som har hög lösningsfrekvens. Gemensamt tycks vara beträffande det matematiska innehållet:

- ökad grad av komplexitet,
- mer sammansatt struktur i problemtypen,
- krav på att känna till det matematiska språket,
- ekvationstänkande,
- formsinne.

Beträffande eleven:

- krav på koncentration, intresse och tankeförmåga,
- större förmåga till planläggning.

SUM-eleverna i årskurs 1 löser uppgifter som

- handlar om tal rätt och slätt, men får svårigheter om de behöver jämföra talmönster,
- är ett-steps-uppgifter, men det blir trassel om det gäller att jämföra, planera och bestämma alternativa betingelser och
- har ett lätt överskådligt mönster, men förvirras av komplicerad struktur.

Eleverna i årskurs 1 förefaller relativt sett ha nått bra resultat. Också i uppgifter som ställer avancerade krav på planlägningsförmåga och förståelse har de nått en långt utvecklad lösningsnivå. Så är främst fallet med Ö-eleverna. Men det är anmärkningsvärt goda prestationer som SUM-eleverna gör.

## ÅRSKURS 5

Vi har studerat de uppgifter i Medelsta-diagnoserna som SUM-elever i årskurs 5 har räknat och jämfört deras resultat med eleverna över medianen. Diagnoserna för årskurs 5 innehåller 67 uppgifter. Figur 4.6 innehåller 11 uppgifter i vilka dessa SUM-elever gjort lösningar ovanför behållningsnivån 70 procent. Där finner vi följande jämförelser mellan prestationer av elever över medianen (Ö-elever) till-

sammans med resultaten för de lägst presterande eleverna (SUM-elever):

Tabell 4.5. Lösningfrekvenser för Ö- och SUM-elever i årskurs 5.

| Uppgift    | 7G | 7H  | 7J | 7K | 7M | 7N | 7P | 7R | 7S | 7T | 8G |
|------------|----|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Ö-elever   | 96 | 100 | 98 | 96 | 99 | 99 | 99 | 96 | 99 | 94 | 97 |
| SUM-elever | 81 | 84  | 74 | 90 | 84 | 87 | 81 | 94 | 84 | 74 | 81 |

Hur ser dessa uppgifter ut? Till att börja med uppgiftstyperna: tal-uppfattning 3 (skriva naturliga tal i utvecklad form), geometri, mätning 4 (namn på triangel, enhetsbyte), räknesätt 4 (enkla problem).

Tydligen lyckas femteklassarna rätt väl med dessa 11 testuppgifter. Inspekterar vi dem står det klart att det är fråga om synnerligen elementära matematiska krav. I 4 uppgifter behöver eleven bara göra en enda operation (7K, 7M, 7N, 7P). I de 3 utvecklad-form-uppgifterna (7G, 7H, 7J) gäller det bara att förstå att sätta in nollor i ett tal. I 8G måste eleven hålla reda på dels förvandlingstalet för timme-minut, dels göra en korrekt addition. I 7R görs två räkneoperationer, i 7S tre räkneoperationer och 7T fyra. Här krävs således ett förhållandevis komplext handlingsmönster men å andra sidan är det mycket små tal som ingår i själva multiplikationerna. Viktigast är nog att alla dessa 11 uppgifter är så alldagliga att eleverna utför dem dagligen och stundligen, så de inte behöver lära sig dem och öva dem i skolan.

Magnes

Matematikdiagnoser 7

SKRIV TALEN MED SIFFROR

G FYRA TUSEN TRETTON = .....

H FEM TUSEN TVÅ = .....

J TRE TUSENTAL FYRA ENTAL = .....

Magnes

Matematikdiagnoser 7

MULTIPLIKATION

K  $193 + 10 =$  .....

Magnes

Matematikdiagnoser 7

M EN-METER ÄR.....CENTIMETER

N EN MINUT ÄR.....SEKUNDER

Magnes

Matematikdiagnoser 8

G 1 TIMME 3 MINUTER ÄR.....MINUTER

Magnes

Matematikdiagnoser 7

VAD KALLAS DESSA FIGURER?



P SVAR: .....

Magnes

Matematikdiagnoser 7

MULTIPLIKATION

$$\begin{array}{r} 53 \\ \cdot 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 46 \\ \cdot 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 145 \\ \cdot 3 \\ \hline \end{array}$$

Magnes

Matematikdiagnoser 9

Avrunda priserna som man gör i affärer.

Varorna kostar

Du ska betala

5 kr 48 öre 5 kr 50 öre

B 1 kr 2 öre .....

C 99 kr 99 öre .....

Magnes

Matematikdiagnoser 9

DIVISION

$$\begin{array}{r} 6000 \\ 10 \overline{) } \\ \hline \end{array}$$

Figur 4.6. Uppgifter som SUM-elever i årskurs 5 löst inom behållningsnivån 70–90 procent.

Man kan kanske uttrycka saken så, att dessa rätt goda prestationer tillhör det sortiment av vardagserfarenheter, som knappast behöver läras i skolan.

Vi har också sett på de 13 uppgifterna som SUM-eleverna har lösningsfrekvenser på 0–30 procent på. Det är uppgifter där Ö-eleverna i två fall kommer nära 80-procentskriteriet, men oftast bara har två av tre rätt, nämligen dessa:

Tabell 4.6. Lösningsfrekvenser för Ö- och SUM-elever i årskurs 5.

| Uppgift    | 7Ä | 8D | 8H | 8Q | 8R | 9A | 9E | 9F | 9L | 9O | 9R | 9X | 9Y |
|------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Ö-elever   | 80 | 61 | 37 | 77 | 72 | 54 | 54 | 55 | 54 | 49 | 61 | 65 | 67 |
| SUM-elever | 29 | 29 | 13 | 29 | 29 | 29 | 6  | 26 | 13 | 23 | 16 | 16 | 16 |

Uppgifterna är hämtade från följande momentområden: Taluppfattning 1 (ordna naturliga tal), Geometri 3 (enhetsbyte, rita kvadrat efter mått, längd- och areabestämning), Räknesätten 9 (addition, multiplikation, division, ekvationslösning).

Man kan nu jämföra komplexitetsnivån för dessa uppgifter med låg lösningsfrekvens med de förut presenterade med högre lösningsfrekvens. Tydligt hade också många Ö-elever besvär med att finna rätt lösning. SUM-eleverna har misslyckats i hög grad.

Magnes

Matematikdiagnoser 7

SÄTT EN RING RUNT RÄTT RÄKNESÄTT

A

I "allsvenskan" gjordes 546 mål på 182 matcher. Hur många mål gjordes i medeltal per match?

ADDITION  
SUBTRAKTION  
MULTIPLIKATION  
DIVISION

Magnes

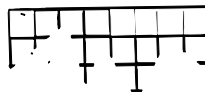
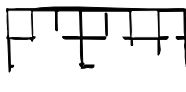
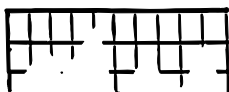
Matematikdiagnoser 8

ADDITION

D  $596 + 8 + 1939 + 87 + 36010$ 

RÄKNA HÄR

MULTIPLIKATION

B  $9 \cdot 708$ R  $8 \cdot 1076$ 

Magnes

Matematikdiagnoser 8

H TIO KRONOR TIO ÖRE ÄR.....ÖRE

Magnes

Matematikdiagnoser 9

A

Rita en kvadrat.  
Använd linjal.  
Sidan ska vara 5,4 cm.  
Rita så noggrant som möjligt.

Magnes

Matematikdiagnoser 9

Ordna dessa tal. Börja med det minsta.

E 1,1 10,5 0,1067 1,0765 6,8

Skriv här: \_\_\_\_\_

Magnes

Matematikdiagnoser 9

HUR MYCKET ÄR (SÄTT EN RING OM RÄTT SVAR)

Räkna här om du behöver

L

$\frac{1}{8}$  av 192  $\rightarrow$  32 37 92 108

Magnes

Matematikdiagnoser 9

MULTIPLIKATION

F  $50 \cdot 40 =$  \_\_\_\_\_

DIVISION

G  $\frac{612063}{9}$ 

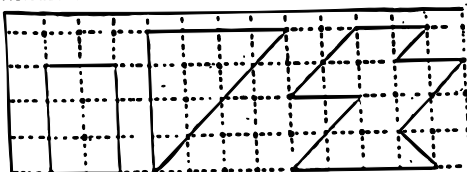
SKRIV TAL I RUTORNA

X  $541 = 600 -$  Y  $704 = 1764 -$  

Magnes

Matematikdiagnoser 9

HUR MÅNGA KVADRATCENTIMETER ÄR VARJE OMRÅDE?



P är  $6 \text{ cm}^2$  Q är  $8 \text{ cm}^2$  R är \_\_\_\_\_  $\text{cm}^2$

Figur 4.7. Uppgifter som SUM-elever i årskurs 5 löst inom behållningsnivån 0–30 procent.

Den här förekommande talskrivningsuppgiften 9E kräver många fler tankesteg än de tidigare nämnda (7G, 7H, 7J, 7K, 7M, 7N, 7P). De två mättningsuppgifterna (8H och 9R) torde kräva mer föreställningsförmåga, kunskap och planering än den nyss nämnda 8G. Så också ritningsuppgiften 9A som nödvändiggör precision och noggrannhet vid sidan av kunskap om att konstruera en rätvinklig figur med lika sidor. Vad beräkningsuppgifterna beträffar, måste eleverna behärska grundteorin att det aritmetiska tänkandet bestäms av det arabiska tiosystemets struktur (7Ä, 8D, 8Q, 8R, 9O), det vill säga att man laborerar med tio tecken, att tecknen ges olika platsvärde (9X, 9Y) och att nollans roll är som platshållare (8Q, 8R, 9F, 9O). Eleverna bör också avrunda tal och välja rätt närmevärde i överslagsräkning (7Ä, 9L). Att de gör misstag beror på brister i kunskapen om detta logiska system (7Ä), att de inte kan det matematiska språket (7Ä) eller att de gör förbiseenden (som att utföra entalsräkning felaktigt eller att okoncentrerat välja fel tecken). Tyvärr inträffar alla dessa tre felanledningar ofta hos SUM-eleverna.

Därvid kommer det sig att felaktigheter i uppgiftslösningarna inte bara beror på

- a) Det matematiska innehållet – vilket många administratörer tycks förmoda.
- b) Elevernas erfarenheter och personliga läggning ger upphov till en viktig felfaktorgrupp – och detta förhållande gör nog många psykologiserande personer alltför stor affär av.
- c) Slutligen kan didaktogena misstag i undervisningen, oklarheter i kursplanen, motsägelser i skoladministrationen och övriga miljöomständigheter hämma, hindra och leda eleverna fel – också om det inte är många som hittills uppmärksammat saken.

Våra tolkningar av femteklassarnas prestationer leder till åsikten att alltför många elever har bristande behärskning av de allra enklaste elementen i begreppssystemet. Kunskap om detta får man knappast genom det övande som exempelvis Lgr 80 argumenterar för genom att bygga på den behavioristiska ”gemensamma elementens teori”. Detta betecknar vi som en didaktogen felfaktor, det vill säga anledningen till elevernas misstag är inbyggd i själva undervisningssystemet.

## ÅRSKURS 4

Eftersom SUM-elevernans behärskning av matematikstoffet i det närmaste tycks motsvara årskurs 4:s genomsnittliga matematiska kunskaper och färdigheter, kan det vara anledning att se på vad Medelstas fjärde årskurs presterar.

Vi väljer också här att jämföra de 50 procent högst presterande (Ö-elever) med de cirka 15 procent lägst presterande (SUM-elever). I årskurs 4 användes diagnoserna 6, 7 och 8 med sammanlagt 72 uppgifter. SUM-eleverna utgörs av 32 elever, det är 13,8 procent av det totala antalet (alltså närmast heltal svarande mot 15-procent). Antalet Ö-elever är 123. Medianen är 53.

**Magnes**  
**Matematikdiagnoser 7**

## SÄTT EN RING RUNT RÄTT RÄKNESÄTT

Ⓐ

20 461 personer betalade 50 kr var för att se en fotbollsmatch. Vad betalade de sammanlagt?

ADDITION  
SUBTRAKTION  
MULTIPLIKATION  
DIVISION

 $\text{A}^-$ 

I "allsvenskan" gjordes 546 mål på 182 matcher. Hur många mål gjordes i medeltal per match?

ADDITION  
SUBTRAKTION  
MULTIPLIKATION  
DIVISION

**Magnes**  
**Matematikdiagnoser 7**

**U MULTIPLIKATION**

$$\begin{array}{r} 806 \\ \cdot 5 \end{array}$$

**Magnes**  
**Matematikdiagnoser 8**

⑨ TIO KRONOR TIO ÖRE ÄR.....ÖRE

**Magnes**  
**Matematikdiagnoser 8**

**(C) SKRIV MED SIFFROR**

EN MILJON

**Magnes**  
**Matematikdiagnoser 8**

## ADDITION

②  $598 + 8 + 1939 + 87 + 36010$

**RÄKNA HÄR**

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 | 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 | 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|

**Magnes**  
**Matematikdiagnoser 8**

## MULTIPLIKATION

100 • 304 = \_\_\_\_\_

⑦  $60 \cdot 100 =$  \_\_\_\_\_

Ⓟ 6-149

④ 9-708

® 8.1076

**Magnes**  
**Matematikdiagnoser 8**

Rita en sträcka som är 7,8 cm lång. Använd linjal.

⑤

Figur 4.8. Uppgifter som SUM-elever i årskurs 4 löst inom behållningsnivån 0–25 procent.

Låt oss först titta på uppgifter som SUM-eleverna i årskurs 4 presterat med en lösningsfrekvens på högst 25 procent. Vilka uppgifter det handlar om framgår av figur 4.8. Det är följande uppgifter:

Tabell 4.7. Lösningsfrekvenser för Ö- och SUM-elever i årskurs 4.

| Uppgift    | 7U | 7Å  | 7Ä | 8C | 8D | 8F | 8H  | 8N  | 8O | 8P | 8Q | 8R |
|------------|----|-----|----|----|----|----|-----|-----|----|----|----|----|
| Ö-elever   | 99 | 100 | 97 | 90 | 97 | 86 | 100 | 100 | 92 | 98 | 84 | 99 |
| SUM-elever | 22 | 25  | 16 | 19 | 16 | 16 | 3   | 0   | 22 | 22 | 22 | 9  |

I följande 18 uppgifter har SUM-eleverna i årskurs 4 lösningsfrekvenser på 70 procent eller däröver (uppgifterna återfinns i figur 4.9):

Tabell 4.8. Lösningsfrekvenser för Ö- och SUM-elever i årskurs 4.

| Uppgift    | 6A | 6E | 6O | 6P | 6Q | 6S | 6T | 6U | 6V | 6X  | 6Y | 6Ä |
|------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|----|----|
| Ö-elever   | 99 | 98 | 99 | 99 | 96 | 97 | 99 | 98 | 98 | 100 | 98 | 97 |
| SUM-elever | 81 | 88 | 81 | 78 | 78 | 78 | 75 | 91 | 78 | 75  | 78 | 91 |

| Uppgift    | 7A | 7G | 7H  | 7N  | 7P | 7R |
|------------|----|----|-----|-----|----|----|
| Ö-elever   | 95 | 89 | 100 | 100 | 98 | 99 |
| SUM-elever | 72 | 78 | 97  | 91  | 75 | 91 |

Magnes  
Matematikdiagnoser 6

ADDITION\_

(A)

$$\begin{array}{r} 67 \\ + 28 \\ \hline \end{array}$$

SUBTRAKTION

(E)

$$\begin{array}{r} 978 \\ - 243 \\ \hline \end{array}$$

Magnes  
Matematikdiagnoser 6

SKRIV SVARET PÅ STRECKET.

RÄKNA HÄR OM DU BEHÖVER

- (O)  $1\,000 + 60 + 2 = \underline{\hspace{2cm}}$   
 (P)  $3\,000 + 400 + 7 = \underline{\hspace{2cm}}$   
 (Q)  $400 + 120 + 16 = \underline{\hspace{2cm}}$

Magnes  
Matematikdiagnoser 6

Talen står fel. Skriv talen i rätt ordning. Börja med det minsta.

(S) 1193 931 1319 1391 →

(T) 1029 1070 1009 1301 →

Magnes  
Matematikdiagnoser 6

MULTIPLIKATION

(U)

$$8 \cdot 0 = \dots\dots\dots$$

(V)

$$6 \cdot 7 = \dots\dots\dots$$

DIVISION

(X)

$$\frac{24}{6} = \underline{\hspace{2cm}}$$

(Y)

$$\frac{6}{6} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Magnes  
Matematikdiagnoser 6

RÄKNA HÄR OM DU BEHÖVER

(Å)

Sedan Mats köpt en glass för 4 kr  
hade han kvar 60 kr 50 öre.  
Hur mycket hade han från början?

Mats hade från början .....kr .....öre.

Magnes  
Matematikdiagnoser 7

SKRIV TALEN MED SIFFROR

(G) FYRA TUSEN TRETTON = .....

(H) FEM TUSEN TVÅ = .....

(I) EN MINUT ÄR ..... SEKUNDER

Magnes  
Matematikdiagnoser 7

SUBTRAKTION

(A)

$$\begin{array}{r} 626 \\ - 347 \\ \hline \end{array}$$

MULTIPLIKATION

(R)

$$\begin{array}{r} 53 \\ \cdot 2 \\ \hline \end{array}$$

Figur 4.9. Uppgifter som SUM-elever i årskurs 4 löst inom behållningsnivån 70–100 procent.

Vi börjar med de 18 uppgifter som SUM-eleverna lyckats bäst med. Deras behållningsprocent är i stort sett på 80-procentsnivån för de här redovisade uppgifterna (14 av 18). Ändå ligger de markant under Ö-eleverna, eftersom dessa fått full poäng på nästan alla uppgifter.

Hur ser dessa uppgifter ut som också lågpresterande elever klarar 80-procentsnivån? 6O, P, Q, S och T är talskrivningsuppgifter, liksom 7G och H. De ligger på samma svårighetsnivå (ca 80 procent) utom 7H "fem tusen två" som alla skriver rätt. Den besläktade 7N "en minut är ... sekunder" kan nästan alla.

Av de övriga är addition 1, subtraktion 2, multiplikation 3 och division 2. De är ytterst elementära. Ändå svarar tre av fyra elever fel på både subtraktion och division samt multiplikationen  $6 \cdot 7$ . Detta är dåligt för att vara barn i årskurs 4.

Den benämnda uppgiften 6Ä har 90-procentig lösning, alltså klart bättre än de "obenämnda" subtraktionerna.

Ö-eleverna har lösningar långt över 90 procent utom i uppgiften 7G "Skriv tal med siffror: fyra tusen tretton" där lösningsprocenten är 89. SUM-eleverna har 78 procent. Troligen är det bara förbiseendefel som dessa elever har begått. Men det är i alla fall ett tjugofemtal Ö-elever som svarat fel. Oförklarligt.

SUM-eleverna har inte fått mer än högst 25 procent rätt på 12 av de 72 uppgifterna i årskurs 4. Först taluppfattning. Bland dessa hittar vi "Skriv med siffror: en miljon ...". Och det går bara för 19 procent av SUM-eleverna (Ö-eleverna inte fler än 90). Bara 3 procent klarar 8N "tio kronor tio öre är ... öre" (alltså en noll-rätt-uppgift!). Nollorna i talen vållar bekymren för alla, också Ö-eleverna. Detta måste anses vara ett undervisningsfel. Vi har tidigare talar om didaktogena fel-faktorer. Man har definierat det som "disharmoni mellan skolsystemets allmänna undervisningsverksamhet och den inlärande elevens individuella inlärningsberedskap". Då dessa aktörer inte passar ihop, går det snett. När inte skolan reagerar på att eleven missar innebörden i tiosystemet och dess beteckningar, så går det snett. Som det gjort för eleverna i dessa fjärdeklasser. Den som tror att man kan öva bort sådant går på didaktogena villovägar.

Flertalet övriga uppgifter är tillämpningar på räkneprinciper (räknelagar). SUM-eleverna kommer alltså inte över 25 procent rätt i dessa exempel. Däremot befinner sig Ö-eleverna väl över 90-gränsen. Det gäller bland annat 8N att multiplicera:  $100 \cdot 304$ , där alla Ö-eleverna har 100 procent rätt (92 procent på " $60 \cdot 100$ " tycks vara förvånansvärt lågt för dem – då är det ca 20 elever som inte fattat meningen).

Räknesätts-exemplen är för SUM-årskurs-fyra-eleverna ett sorgligt kapitel.

Man frestas att fundera över 7Å och 7Ä, där SUM-eleverna har 22, respektive 25 procent. Detta kan tyckas vara fullt tillfredsställande, så länge man inte tar i betraktande att det finns fyra val och ett av dessa måste vara korrekt. Så ren gissning resulterar i 25 procent! Är kunskapen om räknesätten en ren gissning?

Vi konstaterade nyss att nionde årskursens SUM-elever presterar ungefär vad en genomsnittlig fjärdeklassare gör. Vi kan förstås inte jämföra SUM-niorna med Ö-eleverna i de visade årskurs-fyrtabellerna. Men hänger SUM-niorna någorlunda med på den nivå som fyrans median representerar, blir det inte långt under de kunskaper som Ö-eleverna i årskurs 4 besitter. Skulle det röra sig om något som ligger strax över mitten emellan Ö-eleverna och SUM-eleverna så är det inte så dåligt. Ö-eleverna i årskurs 4 har aktningsvärda kunskaper om de naturliga talen. Mätning och räknesätten har de lärt sig åtskilligt om. De förstår dessutom strukturer av matematiskt slag som ekvationstänkande, talsystemets regelverk.

Till sammanfattning: De SUM-elever som vi möter i Medelsta ligger långt efter Ö-eleverna, men de befinner sig i ett kunskapskontinuum där de bildar en sammanhängande kedja av individer som går från positionen av ringa behållning av undervisningen till en position av god kunskap, och detta kontinuum fortsätter med de övriga eleverna under medianen och fullföljs med elever över medianen.

Vi konstaterar också att i grunden har SUM-eleverna på egen hand förvärvat en vardagsmatematik. De har tydligen haft ringa nytta av den undervisning som läroplanen föreskriver. Tyvärr är inte heller den naturliga vardagsmatematiken tillräcklig. Med vardagsmatematik följer att vi bör bredda bilden av vad matematik representerar. Vi tror på att det är en faktor-samspels-modell som bör tillämpas.

### 4.3 FAKTORSAMSPELS-MODELLEN: ”MIO, MIN MIO”

Således har vi tre aktörer i detta spel:

- Matematiken (M) – svår för SUM-eleven
- Individen (I) som inte är godkänd – SUM-eleven
- Omgivningen (O) (”nätverket”) gör att SUM-eleven inte godkänds.

M+I+O bildas av initialerna i Matematiken, Individen och Omgivningen. Vi lånar ordet MIO från Astrid Lindgrens barnbok med detta namn. Ordet MIO sammanfattar den uppfattning som nu brukar kallas faktorsamspels-modellen (MIO-modellen): Att kunna eller inte kunna matematik beror på samspelet mellan flera faktorer. Ingen ensam faktor gör att en elev kan eller inte kan matematik.

Att inte kunna matematik hänger ibland samman med att just matematikens abstrakta natur hindrar lärandet. Någon har sagt att alla som studerar matematik förr eller senare når sin inkompetensnivå. Också universitetsprofessorn i matematik. För elevens del finns hos de flesta en begränsning i fråga om begåvning, uthållighet och arbetslust, annat inte att förglömma. Och omgivningen är uppfylld av såväl stimulerande som hämmande influenser.

Vi vill föreställa oss matematiken som ett delvis självreglerande system av abstrakta strukturer styrt med hjälp av matematiska språket.

Vi vill föreställa oss individen som en självständigt tänkande, om dömesgill biologisk individ styrd av behov, motivation och känslor.

Vi vill föreställa oss omgivningen som det ekologiska system vilket eleven tillhör och utvecklas i. Hit hör bland annat familjemiljö och skolmiljö med normer, skollagar, läroplaner, organisationsformer och undervisningsmetoder.

## KAPITEL 5

### VART HAR VARDAGSMATEMATIKEN TAGIT VÄGEN?

## 5.1 LIVSMATEMATIK – ETT DELMÅL I SKOLANS MATEMATIKUNDERVISNING

Vi har gång på gång funnit att livsmatematik eller vardagsräkning spelar en betydelsefull roll i barnens matematikinlärande. Dels tycks påverkan i vardagssituationer leda till lärdomar om matematik. Dels tycks inlärandet i skolans matematikundervisning vara en motor till vardagsräkning. Så här säger grundskolans läroplan:

Grundskolan har till uppgift att ge eleverna sådana kunskaper och färdigheter i matematik som behövs för att kunna fatta välgrundade beslut i vardagslivets många valsituationer, för att kunna tolka och använda det ökande flödet av information och för att kunna följa och delta i beslutsprocesser i samhället (Lpo 94, s 51).

Således tycks vardagsmatematik eller livsmatematik vara ett väsentligt inslag i den kunskap som eleven bär med sig från skolan. Vad handlar detta om, vare sig vi talar om vardagsmatematik, social matematik, tillämpad matematik eller livsmatematik eller andra liknande uttryck? Nå, vi måste medge att läroplanen för grundskolan inte ger någon specificering på vad det handlar om.

Vi finner också snart att det inte finns mycket om vardagsräkning i Skol-Sverige. Vi träffar på en bok av Olof Carli från 1952, en artikel 1951 av den danske överläraren Mejlsing, skolöverstyrelsens handledning från 1973 Matematik i tillämpning. Så skrev Magne (1997) en utredning för Tromsø PPT om *Elever i gymnasieskolan som har problem med matematikundervisningen*. Hans Nilsson skrev 1999 om "autentiska problem" i sin utmärkta *Upptäck din förmåga att lösa problem*. Det finns också några intressanta bidrag av amerikanska och tyska författare (se Magne 1996). Den norska matematikläraren Ronald Bradal (1999) har studerat behovet av mer praktisk räkning i skolmatematiken.

Ur Olof Carlis bok *Vardagsräkning – Studieplan i matematik för nionde skolåret* citerar vi följande:

Huvudkursen skall, som ovan sagts, omfatta vardagsräkning, "uppgifter valda med hänsyn till det praktiska livets krav och till undervisningen i andra ämnen, särskilt samhällskunskap". Det har synts mig naturligt att då låta olika områden från vardagslivet bilda ramen för kursen och låta räkningen inordnas under denna synpunkt. – Kanske också den av många elever så fruktade matematiken på så sätt blir mera "mänsklig" (Carli 1952, s 12).

Men det finns åtskillig diskussion om vad vardagsmatematik borde innehålla (bibliografi: se Magnes utredning för Tromsø). Läs bland annat amerikanska NCTM:s årsböcker 1979, 1985 och 1997. Ännu bättre: Läs Marilyn Byrns (1998) underhållande bok. Det är olika prestationer som krävs i skolan, utanför skolan, i yrkeslivet. Prestationskraven varierar med de sociala situationerna. På vilkas villkor ska då matematikundervisningen bedrivas?

Vår amerikanska lärarkollega Marilyn Burns frågade lärare på sommarkurs: I vilka sociala situationer behöver du matematik? Här är ett urval av svar:

- planera så jag hinner i tid till skolan,
- besluta när man behöver åka för att hinna till bion,
- avgöra mängden gödning för gräsmattan,
- ta reda på bensinförbrukningen,
- kolla checkboken,
- shoppa i speceriaffären,
- göra ett överslag av växel i butiken,
- finna vad du ska betala på shoppingcentret,
- bestämma inköp för tapetsering,
- dela på notan vid restaurangbesök,
- växla pengar på utlandsresor.

## 5.2 VAD KAN ELEVERNA OM LIVSMATEMATIK – VARDAGSLIVETS MATEMATIK?

Vanliga människor utnyttjar datorn, bilen, tåget och flyget men använder sällan all den matematik som möjliggör dessa ting. Det är matematikforskarna som svarar för i stort sett all teori om matematikens användning i teknik, medicin, nationalekonomi och samhällsvetenskap.

Har ni frågat er: Hur använder vuxna matematik i vardagslivet? Svar: De undersökningar som gjorts antyder att Medel-Svenssons matematik till cirka 90 procent består av privatekonomi. I övrigt rör det sig om att lösa och besluta i praktiska problem, ofta just i penningfrågor. En guldgruva är de psykologiska utredningar av den vuxnes behov av "räknefärdighet" som gjorts av amerikanerna Thorndike (1922) och Wilson (1951). Nåja, vidgas perspektivet till att gälla logiskt tänkande i olika former, ser det kanske annorlunda ut.

Ett annat exempel: Hur ofta använder vi vuxna oss av invanda traditionella räkneuppställningar? Svar: Nästan aldrig. Vi använder

huvudräkning eller miniräknare. Hur förbereder skolmatematiken oss för vår kommande vardagstillvaro? Stämmer det med skolmatematikens innehåll? Vad står i matematikböckerna?

Låt oss se på exemplet räkneuppställningar. Våra svenska böcker i matematik har många övningar för att träna dessa. Man har beräknat att alla elever räknat omkring 3 000 divisioner när de fått sin avgångsexamen i årskurs 9. Detta är kanske gott och väl om eleverna behärskar division effektivt, liksom de övriga räkneuppställningarna. Men så är ju inte fallet.

#### ALGORITMERNASOM BARA VAR TREDJE KAN – ELLER INTE ENS DET

Enligt Magnes svenska undersökningar i Göteborg och Medelsta som är från tiden 1955–1986 (Magne 1990a) räknar 64 procent i årskurs 9 korrekt på divisionen  $5 : 8$  och 70 procent på subtraktionen  $10,7 - 3,356$ . Kanske är det inte just färdigheten som är dålig utan förståelsen, eftersom i båda fallen omkring 10 procent av eleverna räknat uppgiften, som om den skulle lyda  $8 : 5$  och  $3\,356 - 107$ !

Gro Knudsen (1999) visar att i årskurs 1 av norsk videregående skole bara 32 procent löser uppgiften  $45 : 0,05$  medan 40 procent avstår från att räkna!

En rätt stor minoritet av de norska liksom de svenska niondeklasarna har trots deras så långa undervisning om hur man räknar missat att division handlar om att behärska matematiska strukturer och begrepp, inte blinda vanor eller färdigheter. Detta är allvarligt. Avgörande är att våra elever måste begripa hur och varför räkning går till som den gör. Vi kan erbjuda honom eller henne en av våra praktiska miniräknare.

### 5.3 BIRGIT OCH HENNES GÄNG – OM UTSLAGNA OCH DERAS LIVSMATEMATIK

I den nya specialundervisningen i matematik frågar man sig också om inte själva matematikkursen i läroplanen har brister. Man har antytt att skolkurserna är så starkt akademiskt präglade att de missgynnat SUM-eleverna.

Sysslar SUM-eleverna med ett matematiklärostoff, som passar dem? Behöver de just detta? Kanske inte! Ger skolan SUM-eleverna rätt beredskap för deras framtida liv?

Särskilt olyckligt är det om SUM-elever, som händelsevis får plats i yrkesprogram, tvingas att bara läsa den formaliserade A-kursen.

Den innehåller egentligen stoff från grundskolan som de hatar eftersom de redan har misslyckats med det.

Låt oss se vad som hände en gång i en hjälpklass med mycket stora problem. Denna historia vill vi ta till utgångspunkt för problemet hur man kan undervisa i matematik för elever som är utslagna på grund av deras misslyckanden i skolan. Vårt budskap är att man mera måste rätta sig efter eleverna och deras sociala bakgrund än efter de strikta specifikationerna i en läroplan, hur väl denna än kan vara utarbetad.

Historien handlar om besvärliga flickor, och de gick alltså i en hjälpklass 8. Flickorna pinades av skolleda. De gick i avslutningsklassen och nu började vårterminen. Särskilt besvärlig var Birgit, ty för hennes skull hade de tre senaste lärarna gett upp. Klassen hade skapat åt sig en otrevligt destruktiv värdegemenskap. Det var på femtitalet, vid tiden för övergången mellan folkskola och grundskola. Sverige levde då i försöksskolans tid, en frihetstid för svensk skola. Läroplanen var mer flexibel i försöksskolan än den är i våra dagars grundskola.

Skolkontoret hade bestämt att flickorna denna gång skulle undervisas av en manlig lärare. Det blev jag, Olof Magne. Jag tillsattes och informerades om bekymren. Eftersom ingen lärare förväntades stå ut, borde klassen bli föremål för särskilda åtgärder. Jag ställde upp på vissa villkor. Bland annat önskade jag få en tilläggsbudget för den händelse att svårigheterna blev stora.

Tjänstgöringen blev mycket riktigt en mardröm. Eleverna saboterade all undervisning. Allt gick snett under januari månad. Birgit (som egentligen var intelligent) ledde motståndet, men där fanns också Marianne (ett nästan hämningslöst naturbarn) och vackra Dorty som utbrast i hysteriska utbrott mot alla och envar. I själva verket var det mycket i klassen som kunde motivera beteckningen utbrändhet trots att den inte var uppfunnen på den tiden.

Det var socialförvaltningen som blev räddningen. Från denna kom en vänlig dam som ringde upp mig rutinmässigt för att ge klassen den information om livet efter skolan som alla avgångsklasser fick. Vi, den vänliga damen och jag, talades vid efteråt och undrade båda om det fanns något att göra åt denna problemklass. Regimen i klassen måste ändras totalt. Vi började med att pröva två studiebesök, det ena i ett stort barnhem. Det andra fick bli ett hem för gamlingar. Flickorna skulle delta i arbetet. Man kunde bara hoppas på att mötet med småbarn och pensionärer förmådde engagera dem.

Båda studiebesöken blev lyckade. Personalen var mycket nöjd med flickornas uppträdande, och flickorna var överlyckliga över att ha blivit behandlade som likställda. Vi gjorde en lista på daghem,

barnhem, ålderdomshem, storkök, företag, sjukhus, kvinnoklinik, yrkesskola, socialtjänst, arbetsförmedling, polis, kriminalvård etcetera. Vi tänkte oss en eftermiddag i veckan. Besöken skulle förberedas minst en dag i förväg. Flickorna skulle ha bestämda uppgifter och i skolan följa upp med lämpliga aktiviteter.

Stämningen i klassen ändrades. Flickorna tycktes inse, till deras egen stora överraskning, att de verkligen hade förmåga och lust att lära sig något. Den aggressiva Birgit blev i positiv mening en ledare. Hon blev på sätt och vis min assistent och kollega. Det var hon som sa "Vi kan väl sluta med de götrista räknebladen". Nu var det så att klassen nästan fysiskt hatade matematik. Alla var överens om att göra riktiga saker. De ville ha livsmatematik, social matematik, vardagsmatematik där klassen aktivt och kollektivt skapade sina inläringssituationer.

Från början visste vi alla att studiebesöken skulle kosta något. Vi behövde respengar och vi måste ta upp saken först med rektor, därefter med skolförvaltningen. Det var ingen lätt sak för skolbyråkraterna. Principen som vi förfäktade var att elevernas utbildningsbehov måste styra utbildningens finansiering, inte tvärtom, alltså inte att utbildningen måste ske på finansieringens villkor. Efter en del prat löste skolstyrelsen detta problem till allas belåtenhet.

### HUR LÄR SIG ELEVER I SKOLAN?

Lärde sig flickorna något nytt (nyttigt) under de här tre à fyra vårmånader? Jo, en sak tror jag var viktig. Flickorna fick en ändrad syn på förhållandet till vuxna. Jag sa att Birgit ville sluta med räknebladen. Jo, vi slängde dem. Att slänga räknebladen symboliserade kanske vändpunkten i matematik. Först blev flickorna förvånade. De blev alldeles tysta, kanske lite förfärade: "Gör man så?" Sedan rusade de till papperskorgen och med nästan aggressiv våldsamhet rev de sönder räknebladen, ibland i mycket små bitar, och pressade ned dem för att högtidligen, nästan rituellt bli av med dem.

Vi hade en plan för matematiken som utgick från privatekonomi. Alla uppgifter utfördes i grupp. Det handlade om priser, pengar, lön och ersättning för arbete. Vi såg på annonser, mest kläder. Bland annat tippade vi fotbollsmatcher. Ett större projekt gick ut på att inreda "deras" lägenhet i ett hus som vi besökte. I de sociala situationernas livsmatematik var de inte så hjälplösa. Med räknemaskin kunde de till och med dividera. Flickorna ville göra riktiga saker.

Tonåringars praktiska matematik ansluter nästan alltid till deras eget sociala liv. Det handlar nästan bara om pengar. De köper kläder, äter godis, går på bio. Vi fann så småningom att Birgit, Marianne och Dorthy och de andra tonåringarna lärde sig matematik som tillhörde två olika, men inte obesläktade världar, nämligen

- a) saker som de särskilt intresserar sig för (kanske skämtuppgifter) och
- b) saker som hänför sig till var och ens sociala livskvalitet.

Varför kände flickorna så många sociala hinder att lära sig? Visst hade flera av dem svåra inlärningsproblem. Man kan kritisera läroplanen. Därefter kan den traditionella inlärningsmetoden sättas i fråga. De hade tankehinder. Av födsel (lite) och av ohindrad vana (mycket) – jag tänker på det omtyckta problemet om arv och miljö.

#### VAD ÄR VARDAGSMATEMATIK? – HUR RÄKNAR SVENSKA FOLKET?

Just vid tiden innan miniräknarna och mobilerna introducerades tog sig Magne före att göra två små experiment. Det första var att be 15 kursdeltagare i en ABF-kurs räkna uppgiften här nedanför (Magne 1975). Det andra var att ge uppgiften åt en grupp av lärarkandidater. De skulle själva välja att räkna på ett förståndigt sätt, ja, så som de skulle vilja göra i en praktisk situation:

Pröva att lösa uppgiften på ett för dig förnuftigt sätt.

Persson fick 48 kr i timlön. En vecka jobbade han 40 timmar vanlig arbetstid. På onsdag och torsdag hade han dessutom övertid och fick för det 278 kr. Räkna ut Perssons arbetsinkomst under veckan (uppgiften har några år på nacken).

Figur 5.1 och 5.2 visar exempel hur försökspersonerna redovisade sina tankar. Uppgiften löstes numeriskt korrekt av ABF-kursarna, men bara två angav svaret som "2 198 kr" (figur 5.1). Alla i en grupp på 24 lärarstuderande räknade också korrekt numeriskt och av dem gav tre personer svaret "2 198 kr" (figur 5.2). Jag hade väntat att skolrutiner skulle slå igenom i den sistnämnda gruppen. Räknandet där var inte heller precis "skolmässigt". Nästan ingen följde "Frökens metod". Vad skulle den tidens provräkningsrättare ha sagt? Eller för den delen: nutidens?



## 5.4 BERGENDALS TVÅ FLASKOR

Här är exempel som kan illustrera användningen av livsmatematik, det vill säga vardagsmatematik. Matematikprofessorn Gunnar Bergendal (1997) råkade befinna sig på resa till Albuquerque i New Mexico. Han ville köpa en flaska whiskey, American type. Han passade på att fråga flickan bakom disken om de olika flaskornas mått. Hon förklarade: "Detta är en "Quart" och detta är en "Fifth". Hon tillade: "Men jag vet inte varför en Fifth kallas så, för den är faktiskt fyra femtedelar av en Quart". Ni, kära kolleger, som undervisar i matematik inser förstås detta, ty:

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$$

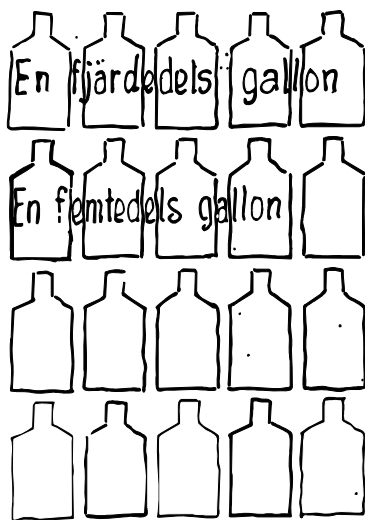
Bergendals whiskey  
fyra femtedelar av  
en "quart" är en "fifth"

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$$

Figur 5.3. Hur en "fifth" förhåller sig till en "quart".

Nu är flickan väl hemmastadd med att man i Amerika talar om gallon när man köper alkohol och bensin. Vill Du som matematiker visa henne hur man räknar, måste du också tala om gallon. Gallon är det som flödar ur Amerikas bensinpumpar och från fabriker till butiker med sprit och vin och öl. Men det finns inga gallonflaskor. För att jämföra en quart med en fifth kan du som lärare föreslå eleverna att fylla en gallon i 20 småflaskor. Lite eftertanke säger att fem småflaskor är en fjärdedels gallon. Fyra småflaskor är en femtedels gallon.

Tar vi detta långsamt, kanske butiksflickan hänger med och utbrister: "Oh, dear mathematics teacher, a fifth is four small bottles and that is four fifths of a quart" (hon menar fem småflaskor).



Figur 5.4. Hur man i vardagsmatematik åskådliggör relationen mellan fourth och fifth.

Jo, alltså ser vi att vi kan tänka på två sätt:

- Det ena är vardagens sätt att resonera konkret.
- Det andra är att använda matematikens logik, till exempel genom bråkräkning.

Faktiskt är båda lika användbara. Kanske kan vi se detta som två olika slag av matematisk kompetens.

Ett tyskt exempel är belysande. Heinz-Jürgen Gottke (1989) utgick från den tyska läroplanens bestämmelse om livsnära matematikundervisning. Enligt läroplanen borde undervisningen i någon utsträckning omfatta "Lebenspraktisch orientierte Aufgaben im Mathematikunterricht" (förkortades till LpAM). Därefter jämfördes kursbestämmelsernas innehåll med 1 158 lektioner vilka analyserades i särskilda observationsprotokoll. LpAM kunde omfatta tre typer, och de betecknades som (I) textuppgifter, (II) livsnära problem eller (III) livsadekvata (= verkliga, praktiska) problem.

Resultat: Enligt Gottke omfattade LpAM 49 procent av samtliga matematikuppgifter i de studerade tyska grundskolorna. Då Gottke ser på LpAM-uppgifterna tycktes

- 96 procent befinna sig på trappsteg I,
- 2 procent på trappsteg II och
- trappsteg III (livsadekvata problem) representeras av 2 procent.

En liknande svensk analys finns hos Magne och Thörn (1987ab), och den stämmer rätt väl överens med huvuddragen i den tyska studien. En räkelära för årskurs 1 innehöll endast uppgifter om taluppfattning och räknesätten addition och subtraktion, medan bland annat "livspraktiskt orienterade övningar" saknades.

Man har undersökt den här saken, bland annat av Dahllöf 1956, Jansson 1964, Dahllöf och Håstad 1967. De flesta studierna publicerades under tiden 1920–1970. I dessa kan vi läsa att

- arbetskraften uppskattas bli mer och mer kvalificerad,
- industrins chefer ansåg det självklart med allt mer avancerade matematikkunskaper hos anställda,
- avancerad matematik sällan behöver användas av industrins chefer men de bör behärska den,
- matematiken hos företagen tillämpas i noga utarbetade rutiner.

## 5.5 EN PEDAGOGISK PARADOX

Vi tycks stå inför en pedagogisk paradox. Å ena sidan är det en chockerande låg användning av enkla numeriska färdigheter i mitt yrkesliv och min fritidstillvaro. Å andra sidan förefaller eleverna ägna rätt mycket tid åt att lära sig en akademisk matematisk färdighet som exempelvis går ut på att någon gång i framtiden som vuxen planera, beräkna och lösa avancerade problem för hur ett företag ska effektivt utnyttja sina resurser.

Emellertid tror vi nu att Dahllöfs och Håstads undersökningar i stort sett bara är historiska kuriositeter. Bradal och andra har slagit hål på den uppfattningen. Min egen undersökning på 1970-talet fortsatte med att jag bad vuxna försökspersoner sammanställa dagboksanteckningar om episoder där matematik ingick som ett väsentligt moment. Vi fick bekräftat att det där med algoritmräkning är förbluffande sällsynt. Men! – Matematik förekom i oerhört stor omfattning. Låt oss ge några exempel.

Exempel 1. På morgonen stiger jag upp och medvetet eller omedvetet gör jag överslagrakning för att ungefärligt möjliggöra att jag når min arbetsplats eller något annat resmål vid rätt tidpunkt.

Exempel 2. Jag går till kafeterian och ska beställa och betala. Medvetet eller omedvetet fattar jag ett beslut som tar hänsyn till en osynlig långtidsbudget vilken bestämmer hur mycket pengar jag får lägga ut på mat.

Exempel 3. Jag är lärare. Jag passar klockan medan jag överväger hur jag ska fördela den planerade skoldagens aktiviteter på rätt sätt.

Exempel 4. Barnen vill ha hund. Men vad kostar det att ha en hund?

Exempel 5. Ska vi fara till Bulgarien eller bli kvar i Sverige på semestern?

Ja, så går min vardag. Matte på jobbet. Matte på fritiden. Tänker vi efter är det ett rätt komplicerat problem att finna hur exempelvis hunden kommer att belasta familjeekonomin. Lägg märke till att i dessa fem exempel är det rätt lite av räkning med penna på ett rutat papper, men ett ganska omfattande logiskt resonerande. Vi har mött en helt annan typ av räknande och redovisande än den som Dahllöf och Håstad förmodade existera.

Om vi tar upp vår semesterplanering, lägger vi märke till att alla möjliga slags matematiska resonemang och övervägande finns med i bilden och att det hela avslutas med att vi fattar ett beslut. Detta att fatta ett beslut är ofta typiskt för praktisk matematik, livsmatematik, vardagsmatematik eller vilket ord vi nu föredrar. Vad gör vi således?

1. Vi formulerar ett problem – vanligen implicit.

Jo, vi börjar med att formulera ett problem, låt vara i implicit form (Vart kan jag resa i sommar med den tid och de pengar som jag vill disponera över.)

2. Vi gör antaganden.

Med det menas att räkna upp allt som talar för och emot olika alternativ vart vi borde resa. Det blir kanske en lista men kanske gör vi hela resonemanget muntligt. Dessa antaganden kanske tillsammans får ett utseende som av en matematisk modell.

Exempel: Vi disponerar 8 dagar.

Vi disponerar 20 000 kronor.

Resan till Bulgarien kostar (olika hypoteser) kronor.

En resa inom Sverige kostar (olika hypoteser) kronor.

3. Vi gör beräkningar. Det vanliga är nog att göra överslagsberäkningar.

4. Vi fattar ett beslut. Därmed utgår vi från alla förutsättningarna och bestämmer oss för det som förefaller klokast.

Ett typiskt exempel är semesterplaneringen. Ska vi välja en billig resa till Bulgarien eller en dyr pensionatsvistelse i Ystad?

Ofta tycks det i ett fall som semesterplaneringen röra sig om familjens lagarbete, där egentligen problemets matematiska sida underordnas värderingar och preferenser. Familjen kan ju inte blunda för hur god ekonomi den har. Det är framför allt där som matematiken kommer till tals. Planering ingår i detta arbete. En väsentlig komponent i den praktiska vardagsmatematiken tycks vara att man måste fatta ett beslut. Vardagsmatematik är en delmängd av social kompetens. Matematik blir då ett socialt redskap för att nå livskvalitet och självständighet. Detta är vad vi kallar livsmatematik.

Sammanfattningsvis: Matematiken i vardagen är en social händelse. Den inrymmer olika nivåer där problemlösningen snarare ter sig som en ”komplicerad matematik” än en enkel räknehändelse.

Får dessa synpunkter någon betydelse för hur vi som matematiklärare planerar matematikundervisningen? Jo, det är klart att vi får ett motiv för att tillgodose läroplanens anvisningar om att ge utrymme åt vardagsräkning i undervisningen. Gör vi det? I tillräcklig utsträckning?

Troligen gör många lärare det. Vilken matematik behöver den skolelev som höstterminen 2006 börjar grundskolan och om något decennium skall ut i vardagstillvaron?

Matematik handlar om att en elev lär sig matematik i ett socialt nätverk tillsammans med lärare, föräldrar och andra. Vi kallar detta en faktor-samspels-modell. En faktorgrupp i samspelet är matematikens lärostoff, en annan är eleven, men det finns en tredje nämligen hela den omgivande verklighetens nätverk som vi lever i. Barns lärande, både Birgits och Mariannes, styrs av samma verksamma krafter:

1. Varje barn är en oskiljaktlig del av ett litet socialt system. Samspelet som barnet deltar i är viktigt. Om systemet blir stört, så blir också barnet stört.
2. En beteende-”störning” betraktas inte som en skada, eller defekt. En didaktogen inlärningsstörning kan ses som en disharmoni (brist på balans) i systemet. Störning i systemet är lika med särskilt utbildningsbehov. Utbildningsbehov för vem? Jo, både barnet och omgivningen!
3. Disharmoni kan beskrivas som olikhet mellan barnets förmåga och omgivningens krav eller förväntningar – ett misslyckande att passa ihop barn och system. Det är inte bara hos barnet som inlärningsstöringen finns. Snarast är det i samspelet mellan barnet och omgivningen som disharmonin uppstår och stör systemet.

4. Målet för hjälp är: få systemet att fungera, efterhand utan hjälp.
5. Förbättring i någon del av systemet kan ge förbättring åt hela systemet. Eftersom alla element i systemet samspelar, är det möjligt att ge hjälp inom ett område och få effekt på ett annat område. Vägen till att hjälpa ett barn är inte nödvändigtvis att påverka barnet. Det kan vara mer givande att påverka andra delar av systemet.

## 5.6 EN KURSPLAN I LIVSMATEMATIK (VARDAGSMATEMATIK)

För Birgit och många av hennes sociala jämlingar är det viktigaste kanske att lära sig livsförberedande erfarenheter. Vi talar om livsmatematik. Livsmatematik är att möta, bearbeta och besluta om problem i vardagen.

Nästan ingen Medel-Svensson använder den räknefärdighet som med så stor möda drillades in i skolan, det vill säga räkneuppställningar enligt "Frökens metod" eller ekvationer enligt "Adjunktens metod". Det matematiska innehållet sträcker sig sällan längre än till årskurs 4 eller 5 i grundskolan.

Men det är på ett annat område som den behövliga kunskapen är desto väsentligare, nämligen att logiskt utreda ett vardagsproblem och att fatta ett klokt beslut.

Läroplanen måste göras mer flexibel. Den måste tillåta förändringar i prioriteringen. Man måste anpassa stoffet efter eleverna. Som för Birgit och Birgits gäng. Vi tror att de begåvningshandikappades matematikundervisning kan förbättras genom att utgå från vardagsmatematik. Här öppnar sig en gyllene port för de som vill reformera den kommunala skolplanen och skolans arbetsplan.

Men vad finns det i läroböckerna? Hur är de anpassade till vardagsproblemen i elevens framtid? Danskarna har börjat med moderna kursböcker i vardagsmatematik (till exempel Forlag Mallings Beck: Hverdags-Matematik, 2001).

I den internationella diskussionen tänker man mer och mer på frågan hur matematikundervisningen bäst ska förbereda eleverna för olika livsuppgifter efter utbildningen. Sådana studier som de om Brasiliens gatubarn och USA:s etniska minoriteter har stimulerat debatten.

Hur ser det lärostoff ut som SUM-eleverna behöver behärska som vuxna? I den nya matematikundervisningen kan man jämföra de praktiska stoffmomenten med de "akademiska" och öka dem. Det

gäller all utbildning från förskolan till gymnasieskolan. Vardagsmatematik har redan plats i läroplanerna. Men det räcker inte med allmänna ord om saken. Vi behöver dessutom specificering. Vad ska lärokursen innehålla i fråga om livsmatematik/vardagsmatematik?

Livsmatematik ska befordra varje individs livskvalitet och förs därmed in i centrum av SUM-elevernans matematikundervisning. Livsmatematik och vardagsmatematik. De antas spela en central roll i den vuxnes tillvaro.

Man kan i detta allmänna sociala matematikmönster urskilja några grundläggande områden för livsmatematiken. Följande inlärningsområden kan ses som viktiga:

- Område 1. Privatekonomi,
- Område 2. Mediamatematik, till exempel information i tidningar och TV,
- Område 3. Sociala och biologiska livsvillkor, hälsa, mat, bostad,
- Område 4. Natur och teknik,
- Område 5. Fritid, estetik, konst och musik,
- Område 6. Samhällets ekonomi och politik samt
- Område 7. Yrkesmatematik, det vill säga matematik i anknytning till jobbet.

Sammanfattningsvis: Eleverna behöver bland annat lära att lösa vardagsproblem. För elevernas livskvalitet har vardagsmatematiken stor betydelse. Lägg märke till följande.

- Det rör sig om att lösa praktiska problem med hjälp av matematik.
- Matematikstoffet svarar mot grundskolans lägre årskurser.
- Det är "Lätt matematik".
- Det är mycket av räkneteknik. Miniräknare är hjälpmedlet
- Problemen är ämnesövergripande. Bland annat med hjälp av logik.

Vi lägger märke till att Birgit och hennes klasskamrater redan från början hade en utpräglad gemenskapskänsla. Olyckligtvis var denna negativ i den meningen att flickorna avskydde samhällsinstitutionen skola. Efter hand ändrade sig själva livsklimatet. Flickorna blev allt mer medvetna om att de själva kunde och måste påverka sin inläring. De fann utvägar att föreslå och fatta ett gemensamt beslut om vad de ville och behövde lära sig. Därmed övergick värdegemenskapen till en positiv kraft. I den ingick både elever och lärare.

Som historien om Birgit och Birgits gäng visar, bör den vanliga matematiken kompletteras – och ofta ersättas – med praktiska aktiviteter som pekar framåt mot vuxenlivet. Aktiviteterna har formen av gruppprojekt med rubriker som

- Köpa tidning i tidningsaffären
- Vilket läppstift är bra?
- Spara till en mountainbike
- Söka jobb
- Vad tjänar jag?
- Mat i kylskåpet
- Måltidsplanering
- Söka bostad
- Bankkontot

Bör matematiken läggas upp på ett annat sätt för elever som hatar matematik? Som känner matematikångest? Som inte förstår? Vi har länge legat i startgroparna för att finna nya aktiviteter.

## KAPITEL 6

### MOT EN FÖRÄNDRAD MATEMATIKUNDERVISNING I GRUNDSKOLAN

## 6.1 KONKRET MATEMATIK

Alltsedan Comenius' *Orbis pictus* (1658) har konkretion varit ett hett pedagogiskt diskussionsämne. Han tog död på den skolastiska pedagogikens aprioriska undervisning. Andra pionjärskrifter för konkretion är senare tiders Friedrich Fröbels *Die Menschenerziehung* (1821), Tom Molls insatser för svensk naturvetenskaplig gymnasieundervisning, K P Nordlunds *Lärogång vid den grundläggande undervisningen i räkning* (1897) och Anna Kruses *Åskådningsmatematik* (1910).

Låt oss se matematikundervisning som ett samspel mellan biologisk växt och social påverkan. Låt oss förutsätta att det bara är den aktivt undersökande individen som lär sig matematik. "Lära ut" kan ingen. Vi har i själva verket tänkt ut en flerfaktor-modell som vi ibland kallar MIO (MIO-modellen). M+I+O bildas av initialerna i Matematiken, Individen och Omgivningen. Vi lånar ordet från Astrid Lindgrens barnbok med samma namn.

Vi har förut beskrivit matematiken som ett delvis självreglerande system av abstrakta strukturer styrt med hjälp av det matematiska språket.

Vi vill föreställa oss individen som ett självständigt, omdömesgillt biologiskt subjekt styrt av behov, motivation och känslor.

Vi vill se eleven som del av den naturliga omgivningen vilket eleven (individen) ingår i, utvecklas i, påverkas av där eleven bland annat undersöker matematik.

Redan i början av förra århundradet kunde en rad forskare och skolmetodiker påvisa att undervisningen ger bättre resultat om lärandet får bygga på autentisk verklighet och kreativ elevaktivitet i stället för verbal framställning och mekanisk drill.

Åtskilliga enkla och vardagliga ting i barnens omgivning kan användas i undervisningen. Sådana föremål som de vuxna har för att mäta och väga med i vardagstillvaron lämpar sig bra för matematikundervisningen, till exempel mynt, vikter, liter- och decilitermått, linjaler, termometrar, klockor och annat. Barnen hjälper till att tillverka särskilda apparater och hjälpmedel som bara passar i skolmatematiken. Hjälpmedlen kan i det sammanhanget kallas laborativa material. Jerome Bruner förde fram den åsikten att skolmatematikens lärande naturligt utvecklades från en

- enaktiv (verklighetsbaserad) kunskapsrepresentation till en
- ikonisk, det vill säga bildrepresentation och slutligen en
- symbolisk representation.

Denna indelning av barns föreställningar som man väl sällan hänvisar till numera tjänar till att exemplifiera barnets aktiva utveckling från handfast verklighet till spel med begrepp.

I många skolämnen har undervisningen anpassat sig till den praxis som betonat att den kreativa tankeverksamheten tas i anspråk vid kunskapsinhämtandet. Matematikundervisningen har emellertid i detta hänseende visat stor tröghet. Förändringarna har under så lång tid som kanske ett hundra år varit påfallande små. Den hittills tillämpade metoden karakteriseras överraskande ofta av att eleverna genom klassundervisning drillas enligt den så kallade "småstegsmetoden" och på egen hand tillägnar sig en viss räknefärdighet. Också de stoffmässiga förändringarna har varit obetydliga. I regel har de inskränkt sig till formella omplaceringar av besläktade övningstyper.

Denna utpräglade tröghet (se till exempel Ulf Lundgren 1979, Per-Olof Bentley 2003 och Madeleine Löwing 2004) mot förändringar hos matematikundervisningen i vårt land är anmärkningsvärd, inte bara därför att forskningsbasen kraftigt ändrats, utan också därför att samhällsstrukturen omdanats både socialt och materiellt. Den tekniska utvecklingen har fört med sig nya uppfinningar och läromedelsframsteg. Dessa förhållanden borde rimligtvis föra med sig att kraven på matematikkunskaper hos eleverna och på matematikundervisningen i skolan måste vara helt andra än för ett århundrade sedan.

En förnyelse av undervisningen måste givetvis också leda till ökade arbetsinsatser i form av förnyad försöksverksamhet i skolan. Som resultat hoppas vi på förbättrade kunskaper.

De största svårigheterna i matematikundervisningen möter man alltid bland de på olika sätt handikappade eleverna. Tvärtemot vad som man hade förväntat sig minskar insatserna för dessa barn. Magne publicerade sin Göteborgsundersökning 1958 om elever med låga prestationer i matematik och redan den 28 augusti 1963 gav svenska regeringen ut föreskrifter om "undervisning i matematikklinik": Undervisningen fick statsbidrag omedelbart.

Vad kunde den nya specialundervisningen enligt 1963 års modell uträtta? Om detta finns mycket skrivet, till exempel Magne (1973, 1980). Enligt matematikklinik-experimentet kan man få så stora vinster som ett och ett halvt års tillskott genom ett års klinikundervisning. I Tyskland har flera författare haft lika stor framgång i experimentella undersökningar. Inte desto mindre beslutade utbildningsdepartementet omkring 1985 att allt statsbidrag till matematikklinikerna skulle upphöra. Sedan dess har inga statsmedel specialdestinerats till FoU-verksamhet kring SUM-undervisning.

## 6.2 HUR ÄNDRA SUM-UNDERVISNINGEN?

Två saker är grunden för den nya specialundervisningen i matematik:

- den allmänna synen på hur matematikundervisningen ska gå till, samt
- ett existentiellt synsätt i specialundervisningen.

För det första: Inför det nya millenniet fanns det en strävan till nytänkande i matematik. I Nordamerika liksom på den europeiska kontinenten var och är nytänkandet lika dramatiskt.

Det är tydligt att de tyska och amerikanska projekten har samma syfte, och det är att alla elever ska få tillgång till flexibla och matematiskt rika läroplaner, högkvalificerade lärare samt en högklassig engagerande matematikundervisning med lika chans för var och en att individuellt utveckla kunskaper.

Elevers lärande anses numera främst inrikta sig på att "aktivt bearbeta", "frivilligt söka", "gemensamt upptäcka", och eleven utvecklas i och genom ett socialt nätverk. Vi talar om en princip för aktivt och undersökande lärande.

Principen för ett aktivt och undersökande lärande innebär att eleverna bereds tillfälle att från början lära känna större meningsområden och variera uppgifterna inom vida gränser.

Ämnesstoffet behandlas friare med utgångspunkt i *prototyp-principen*. Den säger att övningstyper är olika viktiga. Vissa stoffelement är speciellt centrala och därför typiska för ett givet stoffområde. Eleverna söker "tankemönster" och använder dem i nya problem.

Det betyder inte att övandet försummas, eftersom upptäckande och övande ses som två sidor av samma process. Är barnen tillräckligt motiverade väljer de själva att träna och drillas färdigheter. Detta kallas *produktivt lärande*.

Elevernas erfarenheter i vardagslivet ska samtidigt vara grund för lärandet och mål för detta. Det går under namnet *livsmatematik*.

För det andra: Kritiken yrkar på att äldre medicinsk-testpsykologiska avvikelsemodeller revideras eftersom elevernas naturliga förmåga varierar vare sig den handlar om att några är korta och andra långa eller några bra på att räkna, andra inte. De flesta eleverna har en "vanlig variation av kunskaper". Detta är en existentiell modell, det vill säga betraktar matematikförmågan som en del av livet självt.

Den nya specialundervisningen utnyttjar de moderna tankarna inom matematikdidaktiken och specialpedagogiken. Också SUM-eleverna ska upptäcka matematikens abstrakta strukturer. Detta medför att undervisningen måste individualiseras.

Det gäller också att städa ut traditionella element, så att de nya aktiviteterna får utrymme. Småstegsmetoden måste vika för så kallade prototypinlärande. De svårinlärda räkneuppställningarna förvisas till museet och ersätts av bekväma miniräknare. Lärarens undervisande roll blir mera som aktiv handledare än instruktör.

### 6.3 MATEMATIKKLINIKFÖRSÖKET

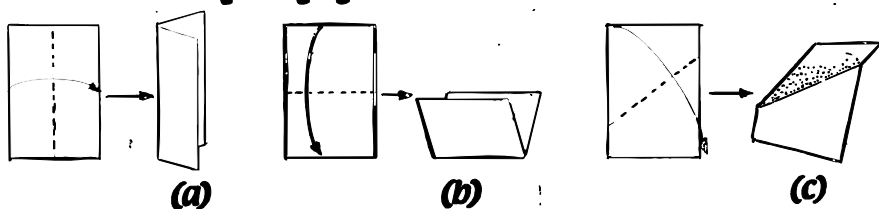
Magnes undersökning kom ut 1958 och ledde redan den 28 augusti 1963 till att regeringen uppdrog åt dåvarande skolöverstyrelsen att ge ut föreskrifter om "undervisning i matematikklinik" för elever med låga matematikprestationer. Undervisningen fick statsbidrag från och med höstterminen 1963. Plötsligt år 1980 upphävde utbildningsdepartementet dessa matematikkliniker. Alla slags anslag ströks ur den statliga budgeten. Kommunerna fick överta ansvaret. Det var faktiskt ett hårt slag.

Matematikkliniken var ett försök i den nya specialpedagogikens anda. Vi som startade, utarbetade en särskild försöksmetod. Metoden kallade vi konkret matematik eller laborativ matematik. Detta var under den moderna matematikens tid så vi satte som mål att SUM-eleverna skulle lära sig det matematiska språket. Laborativ betydde för oss att använda ett konkret problem och resonera sig fram i grupp till en lösning med hjälp av det matematiska språket. Eleverna skulle alltså vara aktiva, tänka på egen hand och samarbeta socialt. Det blev alltså vardagsmatematik.

Låt mig illustrera metoden med ett exempel. Kollegan Ivar Carl-eke använde A4-papper i problem med bråk. Kanske startade han så här för några SUM-elever i årskurs 5. Eleverna har A4-papper. De började till exempel vika papper. Berätta hur det ser ut när viker en gång. Andra sätt att vika en gång? Ja, låt oss se på detta papper – det är vikt på mitten. Hur är delarna lika? Andra sätt att vika och få två lika delar? Jämför delarna! Hur kan du visa att delarna är lika?

Nå, allt detta blir inte klart omedelbart utan måste diskuteras fram på många sätt och vid flera olika tillfällen och med olika praktiska problem.

## Vik A4-papper eller klipp



Figur 6.1. Exempel på pappersvikning.

Här gäller det att tänka på mattespråket! Exempel på resonemang: Tror du halvorna i (a) är lika eller olika stora? Varför tror du det? Jämför en halva i (a) och en halva i (b)? (b) och (c)? Hur visar man att de är lika stora?

Lär dig berätta på mattespråket! – ”En halv, två halva, tre halva”. Att skriva på mattespråket:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

Kommentar: Ivar ville att barnen skulle upptäcka samband mellan matematiska problem. Så han lät barnen jämföra vikning (a) och vikning (b). Naturligtvis kom de fram till att de kunde göra ”fjärdedelar” och därmed bevisa att i vikning (a) och vikning (b) ”var halvorna lika stora”. Ivar Carleke syftade till att barnen skulle finna ett gemensamt mönster, först ett fysiskt, sedan ett tankemönster. Hans plan var att fortsätta ett tag med liknande problem, först då göra två parallella vikningar och låta eleverna finna att lösningen är ett liknande tankemönster som med en vikning. Läsaren kan själv föreställa sig Ivars lärarstrategi i fortsättningen. Elevernas lösning av problem 1 blev alltså prototypen för problem 2 och de följande lösningarna. Vi kallar detta prototypinläring.

I försöksverksamheten kom vi fram till en formel för inlärandet: Upptäckande inlärande (”prototyp”-lärande). Prova olika lösningar av ett praktiskt problem. Gärna autentiska problem, det vill säga, verkliga vardagsproblem. Använd material som ni tror kan passa för er lösning. Visa (bevisa) varför ni tror på lösningen. Men tänk på att matematik alltid är abstrakt, aldrig konkret. Använd det matematiska språket. Sök gärna flera lösningar på problemet.

”Gissa!” – Vid ett senare möte med ett likartat problem börjar ni med att ”Gissa”, det vill säga försök att lösa utan material. Uttryck

er med det matematiska språket? Prova så att använda materialet som ni hade i det tidigare problemet. Varför? För att kolla! Men prova alltid praktiskt då ni är osäkra. Problemet i punkt 1 blev prototyp för följande försök.

Produktiv övning. När du tror att du kan den här uppgiften, öva dig på egen hand med liknande uppgifter. Exempel: Du räknar uppgiften  $55 + 45 = 100$  i huvudet. Välj själv uppgifter i huvudräkning så att du får summan 100. Använd aldrig konkret material passivt vid drillövningar. Exempel som hjälpmedel i addition.

Två krav bör ställas på SUM-undervisningen. För det första bör stoffet nära anknytas till elevens livserfarenhet (livsmatematik). För det andra ska stoffet behandlas så att eleven förstår innehållet och dess budskap (aktivt undersökande). Läraren ska alltså se till att eleven erbjuds lagom mycket stoff i just den takt som passar individen (individuellt program). Inlärandet bör i största möjliga utsträckning utgå från praktiska problem (vardags- eller livsmatematik). Här är några grundregler:

1. För dessa elevers livskvalitet är målet att främst lösa praktiska problem med hjälp av matematik.
2. Medelsta-undersökningarna visar att en SUM-elev i årskurs 9 presterar som en fjärdeklassare. Acceptera att SUM-elever går sakta framåt. De bör inte till varje pris göra samma saker som majoriteten i klassen.
3. SUM-eleverna i Medelsta har en tendens att klara vardagliga problem bättre än formell räkning och mer "akademisk matematik". Låt en SUM-elev arbeta praktiskt. Medel-Svensson räknar sällan med Frökens uppställningar eller med Adjunktens ekvationer. Miniräknaren bör vara standardredskapet för att göra numeriska beräkningar. SUM-eleven klarar i allmänhet detta.
4. Vid behov: anordna enskild undervisning för den lägst presterande SUM-eleven i klassen. Tro inte på att Du kan få eleven att accelerera sin studietakt. Viktigare är det att se till den mentala hälsan och att eleven trivs med sitt skolarbete.

Sammanfattande praktiska synpunkter på SUM-undervisning. Medelsta-undersökningarna torde vara ett av de mest omfattande forskningsprojekten som gjorts beträffande de lägst presterande grundskoleeleverna i matematik.

I studien studerades i en särskild del de 15 procent lägst presterande eleverna. Den här elevgruppen uppvisar förfärande låga prestationer i slutet av grundskoletiden. Genomsnittet för denna grupp i årskurs 9 motsvarar en genomsnittlig elev i årskurs 4. Vi tvingades konstatera att det handlar om en gradvis utslagning från skolans matematikundervisning av denna elevgrupp. Situationen för denna grupp elever är ytterst prekär och det krävs åtgärder av olika slag för att uppfylla riksdagens mål om en grundskola för alla.

En tolkning av resultatet av de tre undersökningarna 1977, 1986 och 2002 är att det finns ett trefaldigt faktorsamspel som förklaring till dessa elevers låga matematikprestationer:

- Matematikstoffet är för komplext.
- Undervisningen präglas av mekaniskt procedurräkande och behöver moderniseras enligt den moderna synen på grundskolans och gymnasieskolans matematikundervisning samt
- Läroplanerna har varit och är för rigida i grundskolans högre årskurser och ensidigt inriktade på fortsatt akademisk karriär, varför de trots hänvisning till "vardagsräkning" saknar nödvändiga specifikationerna på tillämpningar, till exempel vardagsmatematik.

## KAPITEL 7

### AVSLUTANDE KOMMENTARER

## 7.1 ATT RÄKNA MED OLIKHETER

Individuella skillnader i räkning och matematik är oftast mycket tydliga. En del elever synes förstå aritmetikens räknelagar tämligen omgående, de automatiserar tabellerna och räknar snabbt på i boken. Andra elever kämpar hårt med att förstå även de mest enkla talrelationer och arbetet att automatisera tabellerna är mödosamt och många gånger misslyckat. Att eleverna är olika framstår ibland som så självklart att man lätt glömmer bort att det faktiskt har konsekvenser för undervisningen.

Vi kan konstatera att vissa elever kan betecknas som särskilt matematikbegåvade, medan andra kämpar så hårt med matematikinlärandet att vi anser dem ha särskilda utbildningsbehov i matematik (SUM). Därtill kommer skillnader i motivation, intresse och stressbenägenhet. Olyckligtvis lever många barn i sådana socioekonomiska miljöer som ytterligare hämmar deras studiemöjligheter. Skolväsendet försummar både de särskilt begåvade och de med särskilda utbildningsbehov. Skolans uppgift måste vara att stödja och uppmuntra alla elevers matematikutveckling.

I Medelsta-undersökningarna har vi särskilt studerat de 15 procent lägst presterande eleverna, elever med särskilda utbildningsbehov. Varför just 15 procent kanske någon frågar sig. Skattningen går tillbaka till Magnes Göteborgsundersökningar under 1950-talet. Det är också den skattning får mest stöd internationellt (se Dowker 2005). De olika etapperna i Medelsta-undersökningarna ger vid handen att andelen elever med problem att klara skolans matematikkurs är tämligen konstant från läsår till läsår. Ungefär samma andel är det också som inte klarar det nationella ämnesprovet i matematik för årskurs 9.

Intressant är att de skillnader som redovisades i OECDs undersökning PISA 2003 mellan de olika ländernas medelvärden till en icke ringa del kan förklaras utifrån andelen elever med låga eller mycket låga prestationer.

I tabell 7.1 redovisas andelen elever med mycket låga (< nivå 1) och låga (nivå 1) prestationer för Sverige, Finland och Tyskland. Vi ser att i det i PISA så framgångsrika Finland är andelen elever som ligger under nivå 1 1,5 procent, medan den i Sverige ligger nästan fyra gånger så högt (5,6 procent) och i Tyskland mer än 6 gånger (9,2 procent) så högt och på ungefär samma nivå som OECD-genomsnittet. Tyskland har ett föråldrat parallellskolesystem som tidigt delar upp eleverna i tre olika (teoretiska och praktiska) utbildningsvägar. Eleverna har också betydligt kortare skoldagar där. Knappast i

något utvecklat industriland slår den sociala bakgrunden igenom så starkt som i Tyskland. Någon hänsyn till de olika ländernas andel elever med invandrarbakgrund har inte gjorts.

Tabell 7.1. Andelen elever i procent i de lägsta nivåerna i PISA 2003 (OECD 2004).

| PISA 2003  | < Nivå 1 | Nivå 1 | Nivå 1 och lägre |
|------------|----------|--------|------------------|
| Sverige    | 5,6      | 11,7   | 17,3             |
| Finland    | 1,5      | 5,3    | 6,8              |
| Tyskland   | 9,2      | 12,4   | 21,6             |
| OECD-snitt | 8,2      | 13,2   | 21,4             |

En viktig slutsats finns att dra: En riktad satsning på att förbättra kvalitén i undervisningen för de lägst presterande eleverna skulle för Sveriges (och de flesta länders) del radikalt förändra bilden.

Inom en årskurs är det normalt med stora skillnader mellan eleverna. Cockcroft (1982) redovisade uppgifter att inom en normal klass av 11-åringar uppgår variationen mellan eleverna till 7 år i matematisk förmåga. Redan när eleverna börjar skolan kan man iakttä stora individuella skillnader mellan eleverna. Vi har i Medelsta-studien redovisat att SUM-eleverna i årskurs 3 ligger på en nivå med den som en genomsnittlig elev i slutet av årskurs 1 har. I årskurs 6 har en SUM-elev färdigheter motsvarande en genomsnittselev i årskurs 3. När SUM-eleven är i slutet av årskurs 9 har skillnaden gentemot kamraterna ökat dramatiskt. Nu motsvarar SUM-elevens matematikfärdigheter en genomsnittlig elev i årskurs 4 och det är dags att börja i gymnasieskolan.

Man bör komma ihåg att skillnaderna inom SUM-gruppen är stora. Det finns en stor grupp SUM-elever som med en förbättrad, läs: förändrad matematikundervisning, skulle kunna klara grundskolans kurs. För de allra svagaste SUM-eleverna måste matematikundervisningen radikalt förändras mot en inriktning mot vardagsmatematik, såsom diskuterats i kapitel fem. För mellangruppen blir bara delar av mål att uppnå möjliga för gruppen att nå.

En fråga som inställer sig är om den stora variationen i elevernas matematikförmåga är en fråga om gradskillnad eller artskillnad. De svagaste matematikprestationerna kan huvudsakligen ses som nedre delen av ett kontinuum (se Dowker 2005). Det hindrar dock inte att det finns elever med mycket avvikande och specifik matematiksvårighet. Men dessa utgör en liten del av elever med särskilda utbildningsbehov i matematik.

Räkneförmågan är inte en enhetlig förmåga, utan bör snarast uppfattas som sammansatt av olika förmågor. Några elever tenderar att ha höga prestationer inom aritmetik, medan andra har svaga. Det finns också elever som presterar olika inom olika delar av aritmetiken. Matematiken uppfattas ofta som hierarkisk, vilket tar sig uttryck i att den elementära undervisningen utformas som om den vore det. Man bryter ned inläringen av matematiken i små steg, vilka i lärs ut i en bestämd ordning. Exempel på detta är olika typer av behavioristiskt planerade undervisningsprogram, till exempel Mastery Learning som utarbetades av Benjamin Bloom i slutet av 1970-talet.

Det har gjorts empiriska studier där man sökt upprätta hållbara hierarkier mellan olika typer av delfärdigheter, men de har alla misslyckats. Det utesluter naturligtvis inte att vissa delfärdigheter föregår andra. Matematiken bör snarast beskrivas i termer av nätverk eller pussel. Det torde också vara den rådande uppfattningen bland matematikdidaktiker. Vi kommer nedan också redogöra för ett annat sätt att beskriva matematikinläringen.

### 7.3 INTEGRERING VS SEGREGERING

En central fråga för skolsystemet är hur man hanterar den stora variation av olikheter som elever uppvisar i matematik. Ett svar är att betona skillnaderna mellan eleverna och framhäva behovet av olika typer av segregeringade lösningar, till exempel i form av särskilda undervisningsgrupper/-klasser eller nivågrupperingar. Ett annat svar är att negligera elevernas olikheter och därmed osynliggöra SUM-eleverna. Talar man inte om dem, finns de inte. Integrering av alla elever blir därmed det självklara svaret. Om skillnaderna mellan eleverna är ringa, så faller också grunden för olika typer av särskilda lösningar. Mellan dessa ytterligheter, segregering – integrering, har utbildningsdebatten under en lång följd av år skett i något som närmast kan liknas vid ett skyttegravskrig.

I Sverige har elever med särskilda utbildningsbehov i matematik huvudsakligen negligerats och osynliggjorts. Matematikdelegationen, vars arbete omfattade en översyn av hela matematikutbildningen, har bara i förbigående berört de lägst presterande elevernas prekära situation. Ingen av de myndigheter med ett särskilt ansvar för elever i behov av särskilt stöd i matematik (Skolverket, Myndigheten för skolutveckling, Specialskolemyndigheten och Specialpedagogiska institutet) har haft något fokus på denna elevgrupp i sin verksamhet.

De berömvärda initiativ, såsom spridning av forskningsresultat, metodöversikter, programutvärderingar och praktiska erfarenheter, som tagits av skolmyndigheterna på andra områden, till exempel elever i läs- och skrivsvårigheter, saknas helt och hållet för elever med särskilda utbildningsbehov i matematik. Det förefaller som om ansvariga myndigheter underskattar de svårigheter som bristande färdigheter i matematik får i yrkeslivet. Grava matematiksvårigheter är ofta allvarligt handikappande för vuxna i arbetslivet på samma sätt som läs- och skrivsvårigheter kan vara det.

## 7.4 EN INKLUDERANDE SKOLA

I Salamancadeklarationen (Unesco 1994), fastslås *inklusion* som en princip i arbetet för att nå en skola för alla. Inklusion och inkludering förs fram i kritik mot det tidigare använda begreppet integration, som oftast inneburit en fysisk integrering i klassrummet på den ”vanliga” majoritetens villkor.

Är en inkluderande skola, *en skola för alla*, möjlig mot bakgrund av de stora skillnader mellan elevernas prestationer som beskrivits i Medelsta-undersökningen? I förstone verkar en sådan uppgift omöjlig om vi inte vill medverka till att negligera SUM-eleverna.

Vi tror det är nödvändigt att förändra föreställningarna om matematikundervisning och erbjuda andra metaforer för hur vi kan tänka och tala om den elementära matematikundervisningen. Vi ska redovisa ett projekt från några danska kollegor (se Böttger, Kvist-Andersen, Lindenskov & Weng 2004, Lindenskov & Weng 2005), kallat *Regnehuller* (räknehål).

De föreställer sig skolmatematiken som ett landskap där eleven har möjligheter till matematiska upplevelser och att utveckla matematiska begrepp och kompetenser på olika områden. Utifrån sina individuella förutsättningar rör sig eleven i detta landskap. På sin väg kommer elever ibland att möta svårigheter av olika slag. Matematiksvårigheter är knutet till olika delområden av landskapet. För en del elever kan det uppstå hål som de fastnar i och som de kan behöva stöd och stimulans för att ta sig upp ur. Räknehålsmetaforen signalerar en möjlighet till konkreta åtgärder från lärarens och elevens sida. För lärare och föräldrar är det viktigt att veta vad som kan orsaka problem för eleverna. Inklusion betyder för Lindenskov och Weng en utmaning för matematikundervisningen. Räknehål fungerar som en metafor för lärarens uppmärksamhet mot alla elever.

## 7.5 KUNSKAPSLÄGET OCH HANDLINGSPLAN

Den samlade kunskapen om elever med särskilda utbildningsbehov i matematik är relativt andra områden (till exempel läs- och skrivsvårigheter) mycket ringa. Det saknas en enighet bland forskarna om orsaker, utbredning av olika typer av räkneshvårigheter, metoder med mera. Mycket grundforskning återstår. Den internationella, ofta neurologiskt inriktade, forskningen är huvudsakligen inriktad på att ta fram olika diagnosinstrument för tidig identifiering och kategorisering av enkla räkneshvårigheter (se till exempel Butterworth 2003, Butterworth & Yeo 2004, Hasselhorn m fl 2005, Krajewski 2003). Under senare år har medicinsk teknik (bland annat med hjälp av PET och fMRT) gjort stora framsteg och lokaliserat specifika delförmågor för räkning i hjärnan. Däremot är sådana för matematiken mycket väsentliga förmågor som att resonera, dra slutsatser och leda något i bevis ännu ett *terra incognita*, ett outforskat område. Huvudsakligen baseras de neurologiska modellerna på studier av den vuxna hjärnan. Många fallstudier bygger också på vuxna med förvärvade hjärnskador. Vi vet emellertid att barnens hjärna utvecklas under spädbarnsåldern och barndomen. För att förstå hur räkneförmåga och matematisk förmåga utvecklas måste vi studera det växande barnets utveckling. Här återstår ännu mycket att göra.

I Sverige saknas helt evidensbaserad forskning av olika preventions- och interventionsprogram. Internationellt finns flera intressanta program – till exempel The Mathematics Recovery (Storbritannien), Numeracy Recovery – (Storbritannien), Peers Early Education Partnership (PEEP) – (Storbritannien), The Right Start (USA och Kanada), MathWings (USA) – men utgångspunkter och inriktning skiljer dem så mycket åt att det är svårt att dra några mer handfasta pedagogiska slutsatser av dem.

Något mer medvetet utvecklingsarbete finns heller inte för närvarande i Sverige. De försök med matematikkliniker som bedrevs under ledning av bland andra en av oss (Magne) under 1960–1970-talen i hela Norden har inte fått några efterföljder.

Det saknas med andra ord ett ordentligt sakunderlag för politiska beslut av statsmakterna, särskilda insatser av ansvariga myndigheter eller beslut om pedagogiska och didaktiska insatser i skolorna.

Vi som arbetar med forskning inom detta fält kan räknas till en handfull personer i landet. Med nuvarande förhållande är det svårt att utveckla fungerande forskningsmiljöer. Lärar- och specialpedagogutbildningarna dras, bland annat som en följd av brist på egen

forskningsbas, med stora kvalitetsbrister. Idag utbildas specialpedagoger med de mest skiftande lärarbakgrunder, många utan egen erfarenhet av matematikundervisning. Dessa personer förväntas sedan handleda och arbeta med bland annat SUM-elever i skolorna. Bristen på lärare och specialpedagoger med kvalificerad kompetens för SUM-undervisning i kommunerna är skriande.

Vi har framfört våra ståndpunkter i olika sammanhang, bland annat direkt till utbildnings- och kulturdepartementet, men utan resultat. Det finns därför all anledning att upprepa dem.

Låt oss understryka att det handlar om flera års underlåtenheter som måste åtgärdas. Mot bakgrund av den ovan beskrivna situationen för SUM-eleverna och bristen på samlad kunskap (både vetenskaplig och beprövad erfarenhet) finns det en rad åtgärder som statsmakterna bör överväga för att få ett samlat grepp om situationen för denna mycket utsatta elevgrupp:

- ett tydligt uppdrag avseende de lägst presterande elevernas skolsituation ges till de olika berörda myndigheterna,
- en översyn av grundskolans läro- och kursplaner görs för att stödja de lägst presterande eleverna i matematik,
- en översyn av lärar- och specialpedagogutbildning,
- ett stöd till utvecklingsarbete för att ta fram och förbättra metoder och arbetsformer i en inkluderande skola, samt
- en utveckling av forskarresurser inom befintliga eller nya centra/forskarmiljöer till stöd för elever med särskilda utbildningsbehov i matematik, varvid även elever med särskild matematikbegåvning bör uppmärksammas.



## REFERENSER

- Ahlberg, Ann (2000): *The Sensuous and Simultaneous Experience of Numbers*. Report 3. Göteborg: Göteborg University, Department of Education.
- Ahlberg, Ann (2004): Att förstå tal och lära sig räkna. I Arne Engström, red: *Democracy and Participation: A Challenge for Special Educational Needs Education in Mathematics. Proceedings of the 2nd Nordic Research Conference on Special Needs Education in Mathematics*, s 101–119. Reports from the Department of Education, 7. Örebro University.
- Ahlberg, Ann & Csocsán, Emmy (1994): *Grasping Numerosity Among Blind Children*. Report 1994:04. Göteborg: Göteborgs universitet, Institutionen för pedagogik.
- Ahmed, Afzal; Wickman, George & Williams, Honor (2002): *KS3 Mathematics: Numeracy Activities: Plenary, Practical & Problem Solving*. Stafford, UK: Network Educational Press.
- Aster, Michael, von (2001): *ZAREKI. Neuropsychologische Testbatterie für Zahlenverarbeitung und Rechnen bei Kindern. Manual*. Lisse: Swets Test Service.
- Aster, Michael von & Lorenz, Jens-Holger, red. (2005): *Rechenstörungen bei Kindern. Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
- Bentley, Per-Olof (2003): *Mathematics Teachers and Their Teaching*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Bergendal, Gunnar (1997): Två flaskor. Några synpunkter på skolmatematik. *Krut*, (85), s 76–84.
- Bradal, Ronald (1999): Synpunkter på matematikk i utdanningen sett i lys av matematikkens rolle på to utvalgte arbeidsplasser. *Nordisk Matematikdidaktikk*, 7(2), s 7–27.
- Burns, Marilyn (1998): *Math Facing an American Phobia*. Sausalito, CA: Math Solutions Publications.
- Buswell, George T. & John, Leonore (1926): *Diagnostic Chart for Individual Differences: Fundamental Processes in Arithmetic*. Indianapolis, IN: Bobbs Merrill.
- Butterworth, Brian (2003): *Dyscalculia Screener*. London: NFERNelson Publishing.
- Butterworth, Brian & Yeo, Dorian (2004): *Dyscalculia Guidance*. London: NFERNelson Publishing.
- Bøttger, Holger; Kvist-Andersen, Grete; Lindenskov, Lena & Weng, Peter (2004): Regnehuller. I Arne Engström, red: *Democracy and Participation: A Challenge for Special Education in Mathematics. Proceedings of the 2nd Nordic Research Conference on Special*

- Needs Education in Mathematics*, s 121–134. Reports from the Department of Education, 7. Örebro University.
- Carli, Olof (1952): *Vardagsräkning*. Stockholm: Ehrlins.
- Cockcroft, W. H. (1982): *Mathematics Counts: Report of the Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools under the Chairmanship of W.H. Cockcroft*. London. HMSO.
- Cruikshank, William M. (1948): Arithmetic habits of mentally retarded boys. *American Journal of Mental Deficiency*, 52, s 318–330.
- Dahllöf, Urban (1960): *Kursplaneundersökningar i matematik och modersmålet*. SOU 1960:15. Stockholm: Fritzes.
- Dahllöf, Urban & Håstad, Matts (1967): *Ingenjörer och matematik*. Nordiska Kommittén för modernisering av matematikundervisningen. Nordisk utredningsserie 1967:10. Stockholm.
- DES (Department of Education and Science) (1978): *Special Educational Needs* (The Warnock Report). London: HMSO.
- Doverberg, Elisabeth & Pramling-Samuelsson, Ingrid (1999): *Förskolebarn i matematikens värld*. Stockholm: Liber.
- Dowker, Ann (2005): *Individual Differences in Arithmetic. Implications for Psychology, Neuroscience and Education*. Hove: Psychology Press.
- Engström, Arne (1991): *Om konstruktivismen – Några nedslag i den matematikdidaktiska forskningen*. Särtryck och småtryck, 732. Lärarhögskolan i Malmö.
- Engström, Arne (2003): *Specialpedagogiska frågeställningar i matematik: En introduktion*. Arbetsrapporter vid Pedagogiska Institutionen, 8. Örebro universitet.
- Engström, Arne & Magne, Olof (2003): *Medelsta-matematik. Hur väl behärskar grundskolans elever lärostoffet enligt Lgr 69, Lgr 80 och Lpo 94?* Rapporter från Pedagogiska Institutionen, 4. Örebro: Örebro Universitet, Department of Education.
- Foisack, Elsa (2003): *Döva barns begreppsbildning i matematik*. Malmö: Lärarutbildningen.
- Frostad, Per (1998): *Matematikkprestasjoner og matematikkinnsikt hos hørselhemmede grunnskoleelever*. Trondheim: Norges Teknisk-naturvitenskaplige Universitet.
- Gagné, Robert M. & Paradise, N. E. (1961): Abilities and learning sets in knowledge acquisition. *Psychological Monographs*, 75(14), (Whole No. 518).

- Gottke, Hans-Jörgen (1989): Lebenspraktisch orientierte Aufgaben im Mathematikunterricht der Hilfsschule. *Sonderschule*, 34(4), s 218–229.
- Greene, H. A., Knight, F. B., Ruch, G. M. & Studebaker, J. W. (1927): *Compass Survey Test in Arithmetic: Grades 2–4, 4–8*. Chicago: Scott, Foreman.
- Hasselhorn, Marcus; Marx, Harald & Schneider, Wolfgang, red. (2005): *Diagnostik von Mathematikleistungen. Jahrbuch der pädagogisch-psychologischen Diagnostik. Tests und Trends. Neue Folge Band 4*. Göttingen: Hogrefe.
- Hirsch, C.R. & Zweng, M.J., red. (1985): *The Secondary School Curriculum. The 1985 Yearbook of the NCTM*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Ikäheimo, Hannele (1989) *Matematiikan keskeisen oppiaineen hallinta Helsingin peruskoulissa? /Hur väl behärskar de finsktalande eleverna det centrala lärostoffet i matematik i grundskolan?/ Helsingin kaupungin kouluviraston julkaisesarja A4: 1989*. (Helsingfors stad: Skolverket).
- Ikäheimo, Hannele (1991): *Hur väl behärskar eleverna i Helsingfors svenska skolor det Centrala lärostoffet i matematik?* Helsingfors: Helsingfors stads publikationsserie, A3.
- Jansson, S. (1964): Matematikkursens omfång vid individualiserad undervisning. *Skola och Samhälle*, 45, s 6–10.
- Jensen, Per; Andreasen, Jens Jørgen & Lindenskov, Lena (2001): *HverdagsMatematik*. Albertslund, DK: Mallings Beck.
- Johansson, Inger & Wemmenby, Sven Erik (1967): *Räkneförmågetest*. Opublicerad avhandling.
- Knudsen, Gro Inger (1999): *Kartlegging av grunnskoleelevers manglende matematikkferdigheter og holdninger till matematikk*. Oslo: Institutt for Spesialpedagogikk.
- Krajewski, Kristin (2003): *Vorhersage von Rechenschwäche in der Grundschule*. Hamburg: Kovac.
- Kruse, Anna (1910): *Åskådningsmatematik: ett försök till plan för de fyra första skolårens arbete på matematikens område*. Stockholm: Nordstedt.
- Käpnick, Friedhelm (1998): *Mathematisch begabte Kinder*. Frankfurt/ M: Peter Lang.
- Landin, Lars (1950): Användandet av standardprov i hjälpskolan. *Hjälpskolan*, 28, s 10–14.
- Lindenskov, Lena & Weng, Peter (2005): Matematikvanskeligheter og lavt præsterende elever i Danmark. *MONA – Matematik- og*

- Naturfagsdidaktik – tidsskrift for undervisere, forskere og formidlere*, 1 (2), s 56–75.
- Lindsey, L.G., red. (1965): *The Low Achiever in Mathematics*. Washington, D.C.: U.S. Department of Health, Education, and Welfare.
- Lorenz, Jens-Holger & Radatz, Hendrik (1993): *Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht*. Hannover: Schroedel.
- Lunde, Olav (2001): *Tilrettelagt opplæring for matematikk-mestring*. Klepp Stasjon, Norge: Info Vest.
- Lunde, Olav (2002): *Rummelighet i matematik. Del A–C*. Albertslund, Danmark: Mallings Beck.
- Lunde, Olav; Hole, Kari & Hansen, Andreas (1999): *Lærevansker i norsk og matematikk*. Jaren, Norge: PP-tjenestens materiellservice.
- Lundgren, Ulf P. (1979): *Att organisera omvärlden. En introduktion till läroplansanalys*. Stockholm: Liber Publica.
- Löwing, Madeleine (2004): *Matematikundervisningens konkreta gestaltning. En studie av kommunikationen lärare-elev och matematikundervisningens didaktiska ramar*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Magne, Olof (1958): *Dyskalkyli bland folkskoleelever*. Göteborg: Göteborgs universitet, Pedagogiska institutionen.
- Magne, Olof (1960): *Räknesvårigheter i folkskolan*. Stockholm: Sveriges Lärarförbund.
- Magne, Olof (1972): *Magnes matematikprov*. Stockholm: Skandinaviska Testförlaget.
- Magne, Olof (1973): *Matematiksvårigheter*. Pedagogiska Skrifter, 253. Stockholm: Sveriges Lärarförbund.
- Magne, Olof (1975): *Samhället och matematiken – Har vi en ny kris i matematikundervisningen?* Pedagogisk-Psykologiska Problem, 281. Lärarhögskolan i Malmö.
- Magne, Olof (1990a): *Åttaåringar räknar. Hur adderade och subtraherade 1955 och 1984 års elever efter ett år i skolan?* (Medelby-undersökningen) Pedagogisk-Psykologiska Problem, 546. Lärarhögskolan i Malmö.
- Magne, Olof (1990b): *Medelsta-matematik: Hur väl behärskar grundskolans elever lärostoffet enligt Lgr 69 och Lgr 80?* Pedagogisk-Psykologiska Problem, 539. Lärarhögskolan i Malmö.
- Magne, Olof (1996): *Att lyckas med matematik i gymnasieskolan*. Pedagogisk-Psykologiska Problem, 618. Lärarhögskolan i Malmö.
- Magne, Olof (1997): *Elever i gymnasieskolan som har problem med matematikinläringen*. Tromsø: PPT for videregående opplæring.

- Magne, Olof (1998): Matematikinläring – en resa i det inre. I Bertil Gran, red: *Matematik på elevens villkor*, s 99–124. Lund: Studentlitteratur.
- Magne, Olof (2003): *Literature on Special Educational Needs in Mathematics. A Bibliography with Some Comments*. School of Teacher Education, Malmö.
- Magne, Olof (2006): *Fyra essäer om 2000-talets undervisningsteorier i matematik*. (Under publicering).
- Magne, Olof & Thörn, Kerstin (1987): *En kognitiv taxonomi för matematikundervisningen. Del 1. Undersökningen*. Pedagogisk-Psykologiska Problem, 471. Lärarhögskolan i Malmö.
- Magne, Olof & Thörn, Kerstin (1987): *En kognitiv taxonomi för matematikundervisningen. Del 2. Analyser av huvudområden*. Pedagogisk-Psykologiska Problem, 471. Lärarhögskolan i Malmö.
- Malmqvist, Johan (2001): *Kunskapsutveckling hos elever med rörelsehinder: delstudie 3: kognitiva strategier vid arbete med matematikuppgifter med spatialt innehåll*. IPD-rapport 2001:05. Göteborgs universitet.
- Mejsling, Rudolf (1951): Social regning. *Råd og vink om regneundervisning*, s 15–19. Emdrupborg, Danmark: Lærerforeningernes Materialudvalg.
- Nilsson, Hans (1999): *Upptäck din förmåga att lösa problem*. Malmö: Kritan.
- Nordlund, Karl Petter (1987): *Lärogång vid den grundläggande undervisningen i räkning*. Stockholm: Fritze.
- OECD (2004): *Learning for Tomorrow's World. First Results from PISA 2003*. Paris: OECD.
- Ostad, Snorre (1986a): Grunnleggende matematikkinnsikt når barnet ikke ser. *Synspunkt*, (1), s 23–27.
- Ostad, Snorre (1986b): Matematikk når barnet ikke ser: Taktile representasjoner i kunnskapsformidlingen. *Synspunkt*, (3), s 33–38.
- Ostad, Snorre (1989): *Mathematics Through Your Fingertips*. Oslo: Norwegian Institute of Education.
- Ranschburg, Paul (1905): Vergleichende Untersuchungen an normalen und schwachbefähigten Schulkindern. *Zeitschrift für Kinderforschung*, 11(1), s 5–18.
- Scherer, Petra (2002): *Produktives Lernen für Kinder mit Lernschwierigkeiten: Fördern durch Fordern. Bd 1. Zwanzigerraum*. Leipzig: Klett.

- Scherer, Petra (2003): *Produktives Lernen für Kinder mit Lernschwierigkeiten: Fördern durch Fordern. Bd. 2. Addition und Subtraktion im Hunderterraum*. Horneburg: Persen.
- Schmitt, Clara (1921): Extreme retardation in arithmetic. *Elementary School Journal*, 21, s 15–21.
- Schonell, Fred. J. (1937): *Diagnosis of Individual Difficulties in Arithmetic*. Edinburgh: Clarke & Irwin.
- Scott, William (1916): Errors in arithmetic. *Journal of Experimental Pedagogy*, 3, s 296–307.
- Sharon, Sidney & Reys, Robert S., red. (1979) *Applications in School Mathematics. The 1979 Yearbook of the NCTM*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Skinner, Burrhus Fredric (1938): *The Behavior of Organisms: An Experimental Analysis*. New York: Appleton–Century–Crofts.
- Skolverket (1996): Grundskolan: Kursplaner, Betygskriterier. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (2004a): *Nationella utvärderingen av grundskolan 2003*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (2004b): *PISA 2003. Svenska femtonåringars kunskaper och attityder i ett internationellt perspektiv*. Rapport 2004:254. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (2004c): *TIMSS 2003. Svenska elevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i skolår 8 i ett nationellt och internationellt perspektiv*. Rapport 2004: 255. Stockholm: Skolverket.
- SOU 2004:97: Att lyfta matematiken – intresse, lärande, kompetens. Betänkande av Matematikdelegationen.
- Staker, M.R. (1917): *A Study of Mistakes in the Fundamental Operations in Arithmetic*. Chicago: University of Chicago Press.
- Stamm, Margrit (2005): *Jugend zwischen Exzellenz und Versagen. Schullaufbahnen von Frühlesern und Frührechnerinnen*. Zürich: Rüegger.
- Stedøy, Ingvill M. (2005): Matematikkvanser – sett fra matematisk vinkel. I Landskonferanse 23.–25. Mai 2005: *Fra vanske til mestring II*. Kristiansand: Sørlandets Kompetansesenter.
- Thorndike, Edward L. (1922): *Psychology of Arithmetic*. New York: Macmillan.
- Trentacosta, Janet & Kenney, Margaret J., red. (1997): *Multicultural and Gender Equity in the Mathematics Classroom. The 1997 Yearbook of the NCTM*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

- UNESCO (1994): *The Salamanca Statement and Framework for Action. On Special Needs Education*. Paris: UNESCO.
- Watson, John B. (1914): *Behavior: An Introduction to Comparative Psychology*. New York: Holt, Rinehart and Winston.
- Vernon, Paul E. (1949): *Graded Arithmetic-mathematics Test. Manual of Instructions*. London:
- Wigforss, Fritz (1946): *Barnens färdighet i räkning vid skolgångens början*. Stockholm: Svensk Lärartidnings Förlag.
- Wilson, Guy M. (1951): *Teaching the New Arithmetic*. New York: McGraw-Hill.



- 1) Stålhammar, Bert (2000): *Svenska, finska och estniska tioåringars syn på sin tillvaro.*
- 2) Handal, Gunnar (2001): *Lærerutdanningen – kommentarer fra en "kritisk venn".*
- 3) Moreno Herrera, Lázaro & Francia Guadalupe, Eds (2002): *Decentralization and Centralization Policies in Education in Europe. Current Trends and Challenges.*
- 4) Engström, Arne & Magne, Olof (2003): *Medelsta-matematik. Hur väl behärskar grundskolans elever lärostoffet enligt Lgr 69, Lgr 80 och Lpo 94?*
- 5) Falkner, Kajsa (2003): *Lärare på väg mot den tredje moderniteten? En studie av LTG-lärares förhållningssätt i relationen teori-praktik under perioden 1979–2001.*
- 6) Moreno Herrera, Lázaro & Francia Guadalupe, Eds (2004): *Educational Policies. Implications for equity, equality and equivalence.*
- 7) Engström, Arne, Ed (2004): *Democracy and Participation. A Challenge for Special Needs Education in Mathematics.*
- 8) Englund, Tomas, Ed (2004): *Five Professors on Education and Democracy. Inaugural lectures 1999–2003.*
- 9) Gustavsson, Kjell (2005): *Föreställningar om folkbildning. En organisationsdidaktisk och filosofisk belysning av olika bildningsideal.*
- 10) Englund, Anna-Lena (2005): *Jämnårigsocialisation i svensk skola.*
- 11) Skog-Östlin, Kerstin (2005): *Att bryta ny mark. Kvinnors bruk av läroverkslärarutbildning omkring 1900.*
- 12) Engström, Arne & Magne, Olof (2006): *Medelsta-matematik III. Eleverna räknar.*