ÖREBRO
UNIVERSITET

Mattetävling

Sonja Kovalevsky-dagarna 2022

Mattetävlingen består av åtta uppgifter som vardera kan ge maximalt 5 poäng. Inga hjälpmedel är tillåtna. Lämna in lösningarna senast 17.30. Ange svar tydligt, förenkla svaret så långt som möjligt, och motivera era svar väl. På uppgift 5 och 7 räcker det med att rita en korrekt figur för att få full poäng. Lycka till!

Lösningsförslag

1. För varje heltal $n \geq 1$, definiera $f(n)$ genom $f(1) = 2$ och $f(n) = f(n-1) + 2n - 1$ om $n \geq 2$. Bestäm $f(2022)$.

   Lösning: Genom att skriva upp $f(n)$ för några av de minsta värdena på n leds vi till gissningen $f(n) = n^2 + 1$ för alla heltal $n \geq 1$. Gissningen kan verifieras med hjälp induktion: Antag att det är sant för $n = 1, 2, \ldots, p$, där p är något positivt heltal. Då har vi

   $$f(p+1) = f(p) + 2(p+1) - 1 = p^2 + 1 + 2p + 1 = (p+1)^2 + 1\,.$$

   Alltså är gissningen sann även för $n = p + 1$. Enligt induktionsprincipen är den då sann för alla heltal $n \geq 1$. Det gäller nu bara att kvadrera 2022 och lägga till 1. Vi börjar med att räkna ut kvadraten av 1011. Vi får

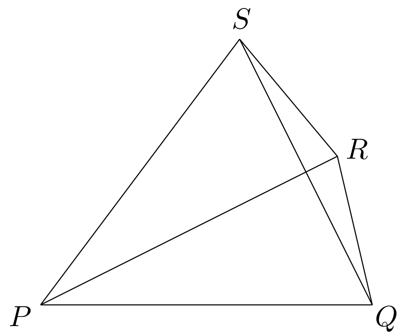
   $$\begin{aligned} 1011^2 &= (1000 + 10 + 1)^2 \\ &= 1000^2 + 10^2 + 1^2 + 2 \cdot 1000 \cdot 10 + 2 \cdot 1000 \cdot 1 + 2 \cdot 10 \cdot 1 \\ &= 1000000 + 100 + 1 + 20000 + 2000 + 20 = 1022121 \end{aligned}$$

   vilket ger

   $$f(2022) = 2022^2 + 1 = (2 \cdot 1011)^2 + 1 = 2^2 \cdot 1011^2 + 1 = 4088485\,.$$

   Svar: $f(2022) = 4088485$.

2. I figuren nedan är sträckorna QR och RS lika långa. Hur långa är de om $|SQ| = a$ och $|PQ| = |PR| = |PS| = 1$?



Lösning: Låt T vara skärningspunkten mellan sträckorna PR och SQ. Eftersom $|QR| = |RS|$ måste $|QT| = |TS| = \frac{1}{2}|SQ| = a/2$. Enligt Pythagoras sats för den rätvinkliga triangeln $\triangle PQT$ har vi då

$$|PT| = \sqrt{|PQ|^2 - |QT|^2} = \sqrt{1-(a/2)^2}$$

och därmed

$$|TR| = |PR| - |PT| = 1 - \sqrt{1-(a/2)^2}\,.$$

Enligt Pythagoras sats för $\triangle QRT$ får vi slutligen

$$\begin{aligned}|QR| &= \sqrt{|QT|^2 + |TR|^2} = \sqrt{(a/2)^2 + \left(1 - \sqrt{1-(a/2)^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{(a/2)^2 + 1 + \left(1-(a/2)^2\right) - 2\sqrt{1-(a/2)^2}} \\ &= \sqrt{2 - 2\sqrt{1-(a/2)^2}} = \sqrt{2 - 2\sqrt{\tfrac{1}{4}(4-a^2)}} = \sqrt{2 - \sqrt{4-a^2}}\,.\end{aligned}$$

Svar: $|QR| = |RS| = \sqrt{2 - \sqrt{4-a^2}}$.

Om vi sätter $a_1 = 2$ och $a_n = \sqrt{2 - \sqrt{4 - {a_{n-1}}^2}}$ för alla heltal $n \geq 2$ så ger detta att a_n är sidan av en regelbunden 2^n-hörning med avståndet 1 mellan varje hörn och mittpunkten. Och om vi sedan sätter $b_n = 2^{n-1}a_n$ så får vi $b_n \to \pi$ (halva omkretsen av en cirkel med radien 1) då $n \to \infty$.

3. För varje positivt heltal n, låt $e(n)$ vara det tal som i det vanliga tiotalssystemet skrivs med enbart n ettor, till exempel $e(n) = 1, 11, 111$ för $n = 1, 2, 3$. Visa att om $e(n)$ är ett primtal så måste n också vara ett primtal.

   Lösning: Anta att n inte är ett primtal, så att n kan skrivas som en produkt $n = pq$ där p och q är heltal större än eller lika med 2. Ettorna i talet $e(n)$ kan alltså delas upp i p grupper med q ettor i varje. Men det betyder att

$$\begin{aligned}
e(n) &= \underbrace{11\ldots1}_{q \text{ ettor}}\underbrace{11\ldots1}_{q \text{ ettor}}\underbrace{11\ldots1}_{q \text{ ettor}}\ \ldots\ \underbrace{11\ldots1}_{q \text{ ettor}} \\
&= \left.\begin{array}{l} 11\ldots1\,00\ldots0\,00\ldots0\ \ldots\ 00\ldots0 \\ +\qquad 11\ldots1\,00\ldots0\ \ldots\ 00\ldots0 \\ +\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \ldots \\ +\qquad\qquad\qquad\qquad 11\ldots1 \end{array}\right\} p \text{ rader} \\
&= 10^{(p-1)q}e(q) + \cdots + 10^{2q}e(q) + 10^{q}e(q) + e(q) \\
&= (10^{(p-1)q} + \cdots + 10^{2q} + 10^{q} + 1)e(q)\,.
\end{aligned}$$

Alltså kan inte $e(n)$ vara ett primtal, om inte är n är det. Omvänt innebär det att om $e(n)$ är ett primtal så måste också n vara det.

4. Jag tänker på tre positiva heltal x, y, z, säger Sonja till Gösta, sådana att $x < y < z$ och $x + y + z \leq 12$. Därefter berättar hon för Gösta vad produkten xyz av de tre talen blir, och frågar om han kan räkna ut vilka tal de är. Nej, svarar Gösta, jag behöver mer information. Är y lika med 4? Sedan Sonja svarat på den frågan vet Gösta vilka de tre talen är. Vet ni det också?

   Lösning: Det finns 23 olika tripplar av tre olika positiva heltal vars summa är mindre än eller lika med tolv. Vi kan skriva upp en lista över deras produkter. Eftersom Gösta behövde mer information måste produkten kunna faktoriseras på fler än ett sätt. Produkten måste alltså förekomma minst två gånger i listan, och då måste den vara 12, 18, 24 eller 30. Eftersom $y \neq 4$ i alla möjliga faktoriseringar av 12, 18 eller 30, är Göstas fråga inte till någon hjälp i dessa fall, och produkten måste vara lika med 24, som kan fås genom

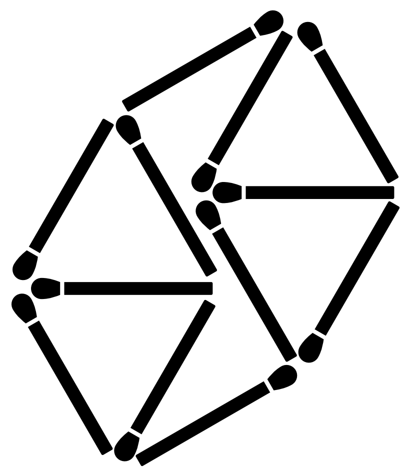
   $$1 \cdot 3 \cdot 8 = 24\,, \qquad 1 \cdot 4 \cdot 6 = 24\,, \qquad 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24\,.$$

   Eftersom Gösta vet vilka talen är när Sonja har svarat på frågan måste hennes svar ha varit ja, och därmed har vi $(x, y, z) = (1, 4, 6)$.

   Svar: $(x, y, z) = (1, 4, 6)$.

5. Tre punkter kan förbindas av tre tändstickor så att två av dem möts i varje punkt, om punkterna bildar hörnen i en liksidig triangel och tändstickorna dess sidor. Visa med en figur hur man kan förbinda åtta punkter med tolv tändstickor som läggs så att tre av dem möts i varje punkt.

   Svar:



Om *fyra* tändstickor ska mötas i varje punkt krävs förmodligen 52 punkter och 104 tändstickor, som bildar *Harborth*-grafen, men det är inte bevisat att det är omöjligt med färre punkter eller tändstickor. Det är dock bevisat att motsvarande problem med fem tändstickor som ska mötas i varje punkt inte har några lösningar.

6. Bestäm produkten xyz om x, y, z är tal sådana att

$$\begin{aligned} 2^x &= 9\,, \\ 3^y &= 2\,, \\ 4^z &= 8\,. \end{aligned}$$

Lösning: Om vi börjar med den tredje ekvationen, därefter tar med den andra och sist den första i beräkningen så får vi

$$8 = 4^z = (2^2)^z = 2^{2z} = (3^y)^{2z} = 3^{2yz} = (3^2)^{yz} = 9^{yz} = (2^x)^{yz} = 2^{xyz}\,.$$

Alltså har vi $2^{xyz} = 8$ och då måste xyz vara lika med 3.

Svar: $xyz = 3$.

7. En tavla ska hängas upp med ett snöre på två krokar på ett sätt sådant att om vilken som helst av de två krokarna tas bort så faller tavlan ner. Hur kan man göra detta? Rita figur!

Lösning: Varje sätt att hänga upp tavlan kan beskrivas som att man utför ett antal operationer efter varandra, där varje operation är en av följande:

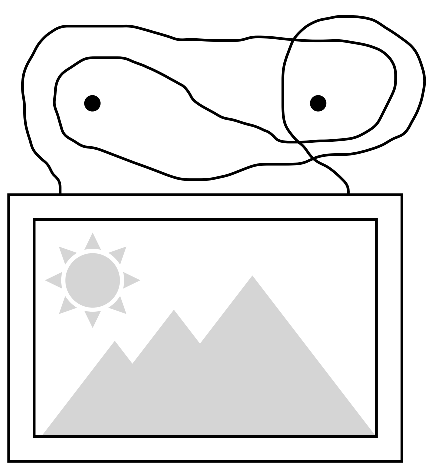
a	:	linda snöret ett varv medurs runt den vänstra kroken
a^{-1}	:	linda snöret ett varv moturs runt den vänstra kroken
b	:	linda snöret ett varv medurs runt den högra kroken
b^{-1}	:	linda snöret ett varv moturs runt den högra kroken

Låt var och en av $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vara en av operationerna ovan. Om vi utför dem i denna ordning, alltså x_1 först och x_n sist, så kan vi beteckna motsvarande sätt att hänga upp tavlan med $x_n x_{n-1} \cdots x_1$ och betrakta det som en produkt av n faktorer, där $x_i x_j$ betyder att man först utför x_j och därefter x_i. (Notera dock att ordningen i allmänhet har betydelse; till exempel är ab och ba två olika sätt att hänga upp tavlan.) Vi har nu

$$aa^{-1} = a^{-1}a = bb^{-1} = b^{-1}b = 1$$

där 1 betecknar utgångsläget som illustreras i figuren, eller att man inte utför någon operation alls. Problemet kan nu formuleras som att vi vill hitta en produkt $x_n x_{n-1} \cdots x_1$, där var och en av faktorerna är en av operationerna a, a^{-1}, b, b^{-1} ovan, som inte är 1, men som blir 1 om alla faktorer a och a^{-1} eller alla faktorer b och b^{-1} plockas bort från produkten. Vi kan till exempel ta $b^{-1}a^{-1}ba$, som svarar mot upphängningen nedan.

Svar: (en av flera möjligheter)



8. Emmy ska fylla år och tänker bjuda fem av sina närmaste vänner på kalas. Hon lägger fem inbjudningskort i var sitt kuvert och postar breven. Efteråt inser hon att hon har begått ett ödesdigert misstag: hon hade skrivit fem *personliga* inbjudningskort. Namnet på gästen stod alltså inte bara på kuvertet utan även på själva inbjudningskortet. Det hade Emmy helt glömt bort när hon la korten i kuverten; hon hade bara gjort det slumpvis. Hur stor är sannolikheten att minst två inbjudningar hamnar rätt?

   Lösning: De fem inbjudningskorten kan fördela sig på de fem kuverten på totalt $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ olika sätt. Vi vill veta i hur många av dessa 120 fall som minst två inbjudningar hamnar rätt. För att undvika dubbelräkning räknar vi först ut i hur många fall precis två inbjudningar hamnar rätt. Vi kan välja dessa två bland de fem på $\binom{5}{2} = 10$ olika sätt. I vart och ett av dessa tio fall kan de återstående tre fördela sig på sex olika sätt. Men endast i två av dessa sex fall hamnar de tre återstående inbjudningarna fel, vilket vi förutsätter eftersom vi nu är intresserade av de fall där precis två av de fem inbjudningarna hamnar rätt. Alltså finns det $10 \cdot 2 = 20$ sådana fall. Därefter räknar vi ut i hur många fall som precis tre inbjudningar hamnar rätt. Dessa tre kan vi också välja på tio sätt eftersom $\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10$. I vart och ett av dessa tio fall kan de återstående två fördela sig på två olika sätt: antingen hamnar båda rätt eller båda fel. Eftersom vi nu bara är intresserade av det fallet där båda hamnar fel får vi tio fall där precis tre inbjudningar hamnar rätt. Dessa ska adderas till de 20 fall där precis två inbjudningar hamnar rätt. Slutligen måste vi lägga till fallet där alla inbjudningar hamnar rätt. (Något fall där precis fyra inbjudningar hamnar rätt finns inte.) Vi får alltså $20+10+1$ fall där minst två inbjudningar hamnar rätt, och sannolikheten blir $31/120$, alltså drygt en fjärdedel.

   Svar: $31/120$.

   På liknande sätt (eller med hjälp av *principen om inklusion och exklusion*) kan man beräkna sannolikheten att alla inbjudningar hamnar fel till $44/120$. För ett godtyckligt antal n gäster kan detta generaliseras till

$$\frac{1}{n!}\left(\binom{n}{0}n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}0!\right)$$

   som närmar sig $1/e \approx 0{,}367879...$ då $n \to \infty$.