ÖREBRO
UNIVERSITET

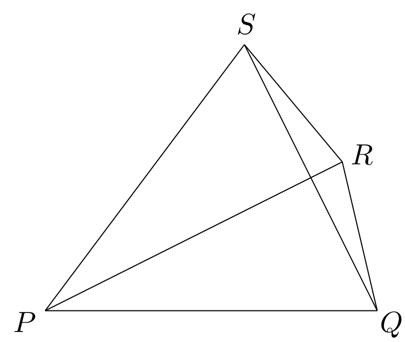
Mattetävling

Sonja Kovalevsky-dagarna 2022

Mattetävlingen består av åtta uppgifter som vardera kan ge maximalt 5 poäng. Inga hjälpmedel är tillåtna. Lämna in lösningarna senast 17.30. Ange svar tydligt, förenkla svaret så långt som möjligt, och motivera era svar väl. På uppgift 5 och 7 räcker det med att rita en korrekt figur för att få full poäng. Lycka till!

1. För varje heltal $n \geq 1$, definiera $f(n)$ genom $f(1) = 2$ och $f(n) = f(n-1) + 2n - 1$ om $n \geq 2$. Bestäm $f(2022)$.

2. I figuren nedan är sträckorna QR och RS lika långa. Hur långa är de om $|SQ| = a$ och $|PQ| = |PR| = |PS| = 1$?



3. För varje positivt heltal n, låt $e(n)$ vara det tal som i det vanliga tiotalssystemet skrivs med enbart n ettor, till exempel $e(n) = 1, 11, 111$ för $n = 1, 2, 3$. Visa att om $e(n)$ är ett primtal så måste n också vara ett primtal.

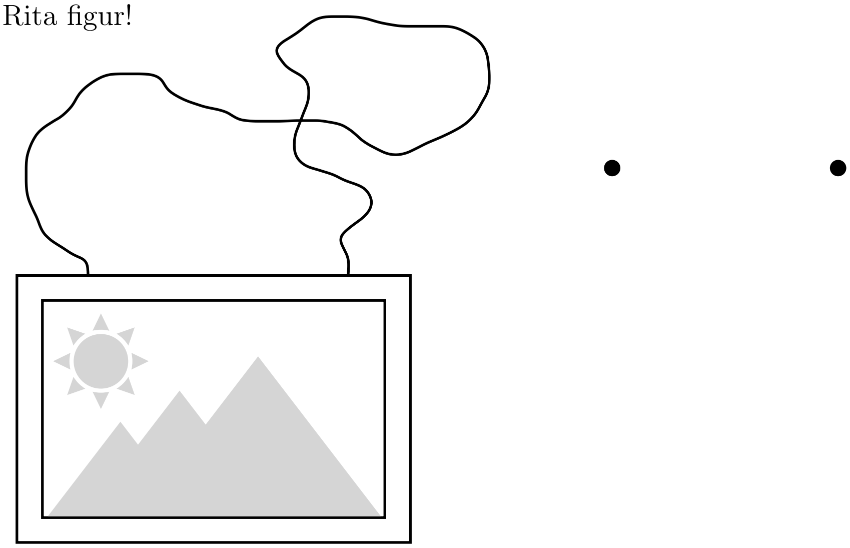
4. Jag tänker på tre positiva heltal x, y, z, säger Sonja till Gösta, sådana att $x < y < z$ och $x + y + z \leq 12$. Därefter berättar hon för Gösta vad produkten xyz av de tre talen blir, och frågar om han kan räkna ut vilka tal de är. Nej, svarar Gösta, jag behöver mer information. Är y lika med 4? Sedan Sonja svarat på den frågan vet Gösta vilka de tre talen är. Vet ni det också?

5. Tre punkter kan förbindas av tre tändstickor så att två av dem möts i varje punkt, om punkterna bildar hörnen i en liksidig triangel och tändstickorna dess sidor. Visa med en figur hur man kan förbinda åtta punkter med tolv tändstickor som läggs så att tre av dem möts i varje punkt.

6. Bestäm produkten xyz om x, y, z är tal sådana att

$$
\begin{aligned}
2^x &= 9\,, \\
3^y &= 2\,, \\
4^z &= 8\,.
\end{aligned}
$$

7. En tavla ska hängas upp med ett snöre på två krokar på ett sätt sådant att om vilken som helst av de två krokarna tas bort så faller tavlan ner. Hur kan man göra detta? Rita figur!



8. Emmy ska fylla år och tänker bjuda fem av sina närmaste vänner på kalas. Hon lägger fem inbjudningskort i var sitt kuvert och postar breven. Efteråt inser hon att hon har begått ett ödesdigert misstag: hon hade skrivit fem *personliga* inbjudningskort. Namnet på gästen stod alltså inte bara på kuvertet utan även på själva inbjudningskortet. Det hade Emmy helt glömt bort när hon la korten i kuverten; hon hade bara gjort det slumpvis. Hur stor är sannolikheten att minst två inbjudningar hamnar rätt?