ÖREBRO
UNIVERSITET

Mattetävling – lösningsförslag

Sonja Kovalevsky-dagarna 2023

Mattetävlingen består av sju uppgifter som vardera kan ge maximalt 5 poäng. Inga hjälpmedel är tillåtna. Lämna in lösningarna senast 17.30. Kontrollera att era namn och alla lösningar finns med. Motivera väl, förenkla så långt som möjligt, och ange svar tydligt. Även ofullständig eller bristfällig lösning kan ge poäng, så försök även om ni inte lyckas lösa uppgiften helt. Lycka till!

1. Låt $s(n)$ beteckna siffersumman av ett positivt heltal n. Om $s(n) = 3$ så är n delbart med 3 och om $s(n) = 9$ så är n delbart med 9. Motsvarande regel gäller inte för delbarhet med 7: Om $s(n) = 7$ så behöver inte n vara delbart med 7. Men för $n = 2023$ gäller faktiskt detta, siffersumman är $s(2023) = 2 + 0 + 2 + 3 = 7$ och $2023 = 7 \cdot 17 \cdot 17$. Visa att om m och n är två tal med denna egenskap, alltså sådana att $s(m) = s(n) = 7$ och båda är delbara med 7, så är differensen $m - n$ delbar med 63.

   Lösning: Talet 7 har uppenbarligen också egenskapen att dess siffersumma är 7 och att det är delbart med 7. Därmed behöver vi bara visa att varje sådant m kan skrivas $m = 63p+7$ för något heltal p, för om vi sedan på motsvarande sätt skriver $n = 63q+7$ så får vi $m-n = 63(p-q)$. Vi antar alltså att m är en heltalsmultipel av 7 sådan att $s(m) = 7$ och vi vill visa att $m - 7$ är delbart med 63, det vill säga delbart med både 7 och 9. Att $m - 7$ är delbart med 7 är uppenbart eftersom m är det. Vidare kan vi anta att $m > 7$ eftersom fallet $m = 7$ är uppenbart, och då följer det att den sista siffran i m måste vara mindre än 7. Vi kan alltså skriva $m = 10^k a + b$ för något k, där $a \geq 1$ och $0 \leq b \leq 6$, vilket ger $s(m) = s(a) + b$. På motsvarande sätt kan vi då skriva

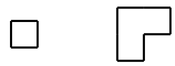
   $$m - 7 = 10^k(a - 1) + (10 + b - 7) = 10^k(a - 1) + (b + 3)$$

   och vi får siffersumman

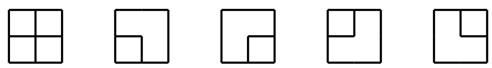
   $$s(m - 7) = s(a) - 1 + (b + 3) = s(a) + b + 2 = s(m) + 2 = 7 + 2 = 9\,.$$

   som visar att $m-7$ också är delbart med 9. (Motsvarande talföljd $7, 70, 133, \ldots$ har beteckningen A063416 i OEIS: `https://oeis.org/A063416`. Nästa gång årtalet har denna egenskap är år 2212.)

2. En kvadratisk chokladkaka som består av 4×4 rutor kan delas på 2023 olika sätt om varje bit måste bestå av en eller tre rutor och ha en av följande två former:



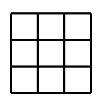
Om chokladkakan består av 2×2 rutor kan den delas på följande fem sätt:



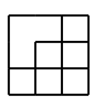
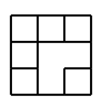
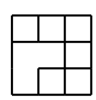
På hur många sätt kan chokladkakan delas om den består av 3×3 rutor? Observera att vi kan rotera den högra formen ovan, och när vi räknar sätt tar vi hänsyn till rotationer och speglingar av hela chokladkakan: fyra av sätten ovan är relaterade till varandra genom rotationer eller speglingar, men räknas alltså som fyra olika.

Lösning: Vi delar upp sätten utifrån hur många gånger den högra formen förekommer. Vi tar hänsyn till speglingar och rotationer genom att ange multipliciteten framför varje figur nedan.

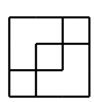
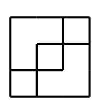
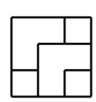
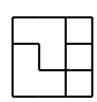
Ingen gång:



En gång:

4  4  8 

Två gånger:

2  4  8  8 

Totalt blir det alltså

$$1 + (4 + 4 + 8) + (2 + 4 + 8 + 8) = 39$$

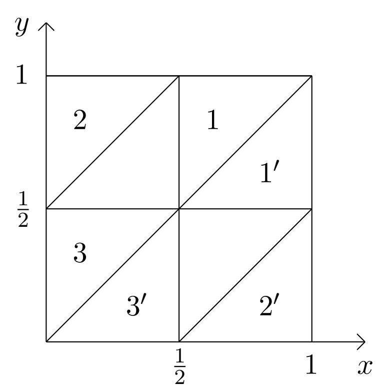
olika sätt. (Motsvarande talföljd $1, 5, 39, 2023, \ldots$ har beteckningen A220061 i OEIS: `https://oeis.org/A220061`.)

3. En pinne bryts i tre delar på två slumpvis utvalda punkter. Hur stor är sannolikheten att det går att bilda en triangel av de tre delarna?

   Lösning: Antag att pinnen har längd 1 och låt x och y vara reella tal mellan 0 och 1 som anger brytpunkterna. Antag att $x < y$. Längderna av de tre delarna är då x, $y-x$ och $1-y$. Låt oss beräkna sannolikheten att det inte går att bilda en triangel. Detta inträffar precis när en av delarna är längre än de två andra tillsammans. Det finns tre olika fall:

   $$\begin{array}{llll} \text{Fall 1:} & x > (y-x)+(1-y) \quad\Leftrightarrow & 2x > 1 \quad\Leftrightarrow & x > \frac{1}{2} \\ \text{Fall 2:} & y-x > x+(1-y) \quad\Leftrightarrow & 2y > 2x+1 \quad\Leftrightarrow & y > \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ \text{Fall 3:} & 1-y-x > x+(y-x) \quad\Leftrightarrow & 1-2y > 0 \quad\Leftrightarrow & y < \frac{1}{2} \end{array}$$

   De tre fallen svarar mot de tre trianglarna märkta 1, 2 och 3 nedan i den stora triangeln, som svarar mot alla fall där $0 < x < y < 1$. Genom att låta x och y byta roller får vi motsvarande fall $1'$, $2'$, $3'$ för $0 < y < x < 1$. De återstående två trianglarna svarar mot de fall där vi verkligen kan bilda en triangel av de tre delarna av pinnen. Deras sammanlagda area är en fjärdedel av den stora kvadratens area, och därmed är sannolikheten en fjärdedel.



4. Två tåg går på järnvägen mellan Wadköping och Badköping (som har dubbelspår). Det ena startar i Wadköping och kör till Badköping samtidigt som det andra startar i Badköping och kör till Wadköping. De möts 9 km från Wadköping. Tågen kör olika fort, men båda håller konstant fart tills de kommer fram. Därefter står de stilla vid stationen lika länge och kör tillbaka i samma fart som tidigare. På vägen tillbaka möts de en andra gång, 5 km från Badköping. Hur lång är järnvägen?

   Lösning: Antag att tåg 1 startar i Wadköping och kör till Badköping och att tåg 2 startar i Badköping och kör till Wadköping. Låt s_1, s_2 vara deras respektive tillryggalagda sträckor när de möts första gången, vid tiden t, och låt ${s_1}', {s_2}'$ vara deras respektive tillryggalagda sträckor när de möts andra gången, vid tiden t'. Låt v_1, v_2 vara deras farter och låt järnvägens längd vara x km. Vi har

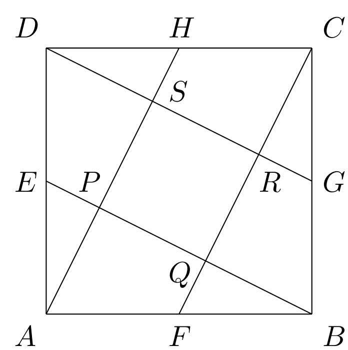
$$t = \frac{s_1}{v_1} = \frac{s_2}{v_2}\,,$$
$$t' = \frac{s_1{}'}{v_1} = \frac{s_2{}'}{v_2}\,,$$

vilket ger $s_1/s_2 = v_1/v_2 = s_1{}'/s_2{}'$, alltså

$$\frac{9}{x-9} = \frac{x+5}{2x-5}\,,$$

som är en andragradsekvation med lösningarna $x = 0$ och $x = 22$. Järnvägen är alltså 22 km lång.

5. Kvadraten $ABCD$ nedan har arean 4 och E, F, G, H är mittpunkter på sidorna. Beräkna arean av kvadraten $PQRS$.



Lösning: Eftersom trianglarna ABP och FBQ är likformiga, och $|AF| = |FB|$ måste $|BQ| = |QP|$. Vidare ger symmetrin i figuren att $|BQ| = |PA|$, och vi vet att $|AB| = 2$. Sätt $x = |BQ| = |QP| = |PA|$, sidan i den lilla triangeln. Nu är triangeln ABP rätvinklig med hypotenusan 2 och kateterna x och $2x$. Pythagoras sats ger

$$x^2 + (2x)^2 = 4$$

och $x^2 = 4/5$.

6. Gösta visar Sonja tre askar. En innehåller två vita kulor, en annan två svarta kulor och den tredje asken innehåller en kula av vardera färgen: en svart och en vit. Innehållet står på locket av varje ask. *Men jag har bytt locken mot varandra*, säger

Gösta till Sonja, *så att ingen av askarna innehåller det som står på locket. Du får välja en ask och ta en kula från den, utan att titta i asken, och sedan lägga på locket igen. Kan du utifrån färgen på denna enda kula avgöra vad som finns i varje ask?* Det kunde Sonja. Hur gjorde hon?

Lösning: Sonja tar en kula från asken vars lock säger att den innehåller är en svart och en vit kula. Antag att den är vit. Eftersom Sonja vet att asken inte innehåller det som står på locket måste den andra kulan också vara vit. Av de återstående askarna måste då en innehålla två svarta kulor, och det kan inte vara den där detta står på locket, utan det måste vara den där locket säger att båda kulorna är vita. Sedan finns det förstås bara en möjlighet kvar för den sista asken. Och precis samma resonemang fungerar förstås om den kula som Sonja tar upp är svart.

7. En vanlig kortlek på 52 kort blandas genom att den delas i två lika stora högar som får haka i varandra så att vartannat kort efter blandningen kommer från den ena högen och vartannat kort från den andra, med bevarad inbördes ordning i respektive hög. Det översta kortet i leken förblir överst efter blandningen, och det näst översta kommer efter blandningen att vara det tredje översta. Däremellan hamnar kort 27 i den ursprungliga ordningen, som alltså efter blandningen blir kort 2, kort 28 blir kort 4, och så vidare. Proceduren upprepas. Efter hur många blandningar på detta sätt ligger korten åter i den ursprungliga ordningen?

   Lösning: Det understa kortet, kort 52, kommer alltid att ligga underst, så det räcker med att studera hur de andra korten blandas. Blandningen är då en permutation f av $\{1, 2, \ldots, 51\}$ som ges av

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{om} \quad 1 \leq x \leq 26\,, \\ 2x - 52 & \text{om} \quad 27 \leq x \leq 51\,. \end{cases}$$

   Vi får att $f(x) \equiv 2x - 1 \pmod{51}$, vilket betyder att $f(x) = 2x - 1 + 51k$ för något heltal k, och eftersom $f(x) \in \{1, 2, \ldots, 51\}$ är $f(x)$ entydigt bestämt av detta villkor. (Detta är anledningen till att vi exkluderade kort 52 – entydigheten hade gått förlorad om vi hade inkluderat det.) Om vi utför blandningen flera gånger så får vi

$$\begin{aligned} f^2(x) &\equiv 2(2x - 1) - 1 = 4x - 3 \pmod{51}\,, \\ f^3(x) &\equiv 2(4x - 3) - 1 = 8x - 7 \pmod{51}\,, \\ &\cdots \end{aligned}$$

   och det är lätt att visa (genom induktion) att

$$f^n(x) \equiv 2^n x - (2^n - 1) = 2^n(x - 1) + 1 \pmod{51}\,,$$

Om nu den ursprungliga ordningen ska vara återställd efter n blandningar måste

$$2^n(x-1)+1 \equiv x \pmod{51}$$

för alla x vilket betyder att

$$2^n(x-1)-(x-1) \equiv 0 \pmod{51}$$

det vill säga $(2^n-1)(x-1) \equiv 0$. Alltså måste $(2^n-1)(x-1)$ vara en heltalsmultipel av 51 för alla $x = 1, 2, \ldots, 51$. Speciellt (fallet $x = 2$) måste $(2^n - 1)$ vara en heltalsmultipel av 51 (och omvänt är detta inte bara ett nödvändigt utan också ett tillräckligt villkor). Vi kan alltså gå igenom talen 2^n-1 för $n = 1, 2, \ldots$ tills vi hittar en heltalsmultipel av 51 och vi kommer då fram till $2^8 - 1 = 255 = 5 \cdot 51$, varpå vi drar slutsatsen att den ursprungliga ordningen återställs efter åtta blandningar. (Det är ett relativt litet antal i förhållande till antalet kort – en kortlek med 54 kort skulle vi behöva blanda 52 gånger. Se `https://oeis.org/A002326`.)